

Control de procesos

2024-25

Javier Arántegui

2023-04-19

Tabla de contenidos

102591 Instalaciones auxiliares en la industria alimentaria (2024-25)	3
Instrumentación y control de procesos	3
Profesor	3
Consultas	3
Descripción del contenido	3
Objetivos	3
Contenido de la asignatura y calendario previsto	4
Bibliografía y otro material	5
1 Introducción al control de procesos	6
Introducción	6
1.1 Breve historia del control de procesos	6
1.1.1 En la antigüedad	6
1.1.2 Durante la revolución industrial	6
1.1.3 Inicios teóricos	8
1.1.4 Implantación en la industria	9
1.2 Contexto de la disciplina	10
1.3 Descripción cualitativa de un ejemplo de proceso alimentario y sus sistemas de control	10
1.4 Conceptos generales	12
1.5 Problemas	14
Problema 1.1	14
Problema 1.2	16
Problema 1.3	17
Problema 1.4	17
Problema 1.5	18
2 Instrumentación industrial	19
2.1 Algunas definiciones de instrumentación	19
2.2 Algo de instrumentación	22
2.2.1 Dispositivos de medida (sensores)	22
2.2.2 Medidores de caudal	23
2.2.3 Sensores de temperatura	23
2.2.4 Líneas de transmisión	23
2.2.5 Elementos finales de control	24
3 Como abordar la dinámica de un sistema	25
Introducción	25
3.1 Un ejemplo de dinámica de un sistema. ¿Qué se desea conocer?	26
3.2 La transformada de Laplace como herramienta útil	28
3.3 La función de transferencia. Álgebra de funciones de transferencia	29
3.4 Transformadas de algunas funciones singulares	31
3.4.1 Función escalón	31
3.4.2 Función pulso	33
3.4.3 Función impulso	34
3.4.4 Función rampa	35
3.4.5 Funciones trigonométricas	35

3.5	Inversión de transformadas. De vuelta al tiempo real	36
3.6	Expansión en fracciones parciales	38
3.7	Transformadas de Laplace	40
3.8	Problemas	41
	Problema 3.1	41
	Problema 3.2	42
	Problema 3.3	46
	Problema 3.4	48
	Problema 3.5	49
	Problema 3.6	51
	Problema 3.7	54
	Problema 3.8	56
4	Sistemas lineales de primer orden	59
4.1	Definición de sistema lineal de primer orden	59
4.2	Respuesta a una entrada en escalón	60
4.3	Propiedades de un sistema de primer orden	61
	4.3.1 Autorregulación	61
	4.3.2 Velocidad de la respuesta	62
4.4	Respuesta a una función impulso	63
4.5	Respuesta a una función sinusoidal	64
4.6	Problemas	65
	Problema 4.1	65
	Problema 4.2	68
	Problema 4.3	69
	Problema 4.4	71
	Problema 4.5	72
5	Sistemas lineales de segundo orden	73
5.1	Definición de sistema de segundo orden	73
5.2	Respuesta a una entrada en escalón	75
5.3	Respuesta sobreamortiguada	75
5.4	Respuesta críticamente amortiguada	76
5.5	Respuesta subamortiguada	76
5.6	Linealización	77
5.7	Retrasos	78
5.8	Problemas	79
	Problema 5.1	79
	Problema 5.2	80
	Problema 5.3	80
	Problema 5.4	81
6	Acciones de control	84
6.1	Descripción de un bucle de control	84
	6.1.1 Componentes de un lazo de control	84
	6.1.2 Componentes de acción inversa	85
	6.1.3 Forma canónica	86
6.2	Control proporcional (P)	87
6.3	Control Proporcional + Integral (PI)	88
6.4	Control Proporcional + Derivativo (PD)	89
6.5	Control Proporcional + Integral + Derivativo (PID)	89
6.6	Problemas	90
	Problema 6.1	90
	Problema 6.2	90

Problema 6.3	92
Problema 6.4	93
Problema 6.5	94
Problema 6.6	95
Problema 6.7	95
7 Control por retroalimentación de sistemas lineales	96
7.1 Acción de control proporcional	96
7.1.1 Procesos de primer orden	96
7.1.2 Procesos de 2º orden	98
7.2 Acción de control integral	98
7.3 Acción de control derivativa	99
7.4 Acciones de control combinadas	99
7.4.1 Acción de control PI	99
7.4.2 Acción de control PID	100
7.5 Influencia de los retrasos	100
7.6 Introducción al diseño de sistemas de control por retroalimentación	100
7.7 Problemas	101
Problema 7.1	101
Problema 7.2	103
Problema 7.3	105
Problema 7.4	108
Problema 7.5	109
Problema 7.6	112
Problema 7.7	114
Problema 7.8	115
Problema 7.9	116
Problema 7.10	120
Problema 7.11	123
Problema 7.12	123
Problema 7.13	124
Problema 7.14	124
8 Análisis de estabilidad de sistemas	125
8.1 Definición de estabilidad. Ecuación característica	125
8.2 Método de Routh-Hurwitz	127
8.3 Método del lugar de las raíces	128
8.4 Análisis armónico de sistemas lineales. Diagramas de Bode	129
8.4.1 Sistemas lineales de primer orden	131
8.4.2 Sistema lineal de segundo orden	132
8.4.3 Retraso	133
8.4.4 Controladores	133
8.4.5 Sistemas de varios componentes	136
8.5 Criterio de estabilidad de Bode	137
8.5.1 Márgenes de ganancia y de fase	139
8.6 Criterio de estabilidad de Nyquist	141
8.7 Problemas	144
Problema 8.1	144
Problema 8.2	144
Problema 8.3	146
Problema 8.4	146
Problema 8.5	147
Problema 8.6	147
Problema 8.7	147

Problema 8.8	149
Problema 8.9	151
Problema 8.10	151
Problema 8.11	155
Problema 8.12	157
Problema 8.13	161
Problema 8.14	161
Problema 8.15	161
Problema 8.16	161
Problema 8.17	163
Problema 8.18	164
Problema 8.19	173
9 Métodos empíricos y semiempíricos	174
9.1 Método del ensayo y error	174
9.2 Métodos de criterio único	174
9.3 Método del criterio integral con el tiempo	175
9.4 Método de la curva de respuesta. Método de Cohen y Coon	176
9.5 Método de Ziegler y Nichols	178
9.6 Problemas	180
Problema 9.1	180
Problema 9.2	182
Problema 9.3	188
Problema 9.4	189
Problema 9.5	192
Problema 9.6	195
Problema 9.7	195
Problema 9.8	196
Problema 9.9	196
Problema 9.10	201
Problema 9.11	201
10 Sistemas de control avanzado	208
10.1 Procesos con retrasos grandes	208
10.2 Control en cascada	209
Referencias	213

102591 Instalaciones auxiliares en la industria alimentaria (2024-25)

Instrumentación y control de procesos

Profesor

Javier Arántegui

Dept. de Tecnologia, Enginyeria i Ciència d'Aliments

Desp. 2.2.13

Tel. 973 702 595

Consultas

Se contestarán las dudas a través de la mensajería del campus virtual, si son breves. También en persona o por videoconferencia acordando previamente una cita.

Descripción del contenido

En esta parte de la asignatura se proporcionará el conocimiento, la sistemática y las técnicas de actuación necesarias para diseñar los sistemas de control de los sistemas de procesamiento de alimentos. Este es un curso de introducción y solo se verán las herramientas más básicas y no se profundizará en herramientas más avanzadas.

Esto significa que al acabar tienes que ser capaz de diseñar el sistema de control de una operación en una industria alimentaria. Por ejemplo, lograr que un pasteurizador trabaje a la temperatura adecuada y que tenga la capacidad de adaptarse a las condiciones de operación que se vayan presentando.

Realizaremos un enfoque eminentemente práctico, aunque no olvidaremos las partes teóricas más importantes. Durante el curso utilizaremos de manera habitual [Julia](#).

Objetivos

Objetivo general

Proporcionar el conocimiento, la sistemática y las técnicas de actuación necesaria para diseñar los sistemas de control de los sistemas de procesamiento de alimentos.

Objetivos específicos

En esta parte queremos sentar las bases del control de procesos por retroalimentación en la industria alimentaria y ofrecer las herramientas necesarias para poder aplicar el control de procesos en cualquier industria alimentaria.

Los objetivos específicos para lograrlo son:

- **Introducción:**

- Conocer la importancia del control de procesos en la industria alimentaria moderna.
- Conocer los principales elementos de un lazo de control.
- Conocer los principales instrumentos de medida y actuadores utilizados en la industria alimentaria.
- Decidir con criterio en que casos utilizar un sistema de control por retroalimentación o en adelanto.

- **Dinámica de sistemas de control por retroalimentación:**

- Plantear el modelo matemático de una operación básica o de un proceso alimentaria para poder predecir su comportamiento en función del tiempo.
- Analizar un sistema de control por retroalimentación.
- Conocer qué lazos de control existen en los principales procesos alimentarios.
- Conocer el comportamiento dinámico de las principales acciones de control.
- Valorar la influencia de los retrasos en el comportamiento dinámico de un sistema de control.
- Calcular el comportamiento dinámico de un lazo de control por retroalimentación.

- **Diseño de sistemas de control:**

- Diseñar un lazo de control por retroalimentación de un proceso, seleccionando adecuadamente el controlador y sus parámetros óptimos.
- Tener la capacidad de implementar un lazo de control en un proceso alimentario.
- Ser capaz de evaluar y mejorar el comportamiento de un lazo de control existente.

Contenido de la asignatura y calendario previsto

Este es la planificación prevista de la asignatura:

Día - Contenido (Horas)

3 de febrero Presentación 1 - Introducción al control de procesos (2)

4 de febrero 1 - Introducción al control de procesos (1) + 2 - Instrumentación industrial (1)

5 de febrero 2 - Instrumentación industrial (2)

10 de febrero 3 - Cómo abordar la dinámica de un sistema (2)

11 de febrero NO HAY CLASE

12 de febrero 3 - Cómo abordar la dinámica de un sistema (2)

17 de febrero 4 - Sistemas de primer orden (2)

18 de febrero 5 - Sistemas de segundo orden (2)

19 de febrero 6 - Acciones de control (2)

24 de febrero 7 - Control por retroalimentación de sistemas lineales (2)

25 de febrero 7 - Control por retroalimentación de sistemas lineales (2)

26 de febrero 8 - Análisis de estabilidad. Routh-Hurwitz y Lugar de las raíces (2)

3 de marzo 8 - Análisis de estabilidad. Diagramas de Bode (2)

4 de marzo 8 - Análisis de estabilidad. Criterio de estabilidad de Bode (2)

5 de marzo 9 - Métodos semiempíricos (2)

10 de marzo 9 - Métodos semiempíricos (2)

11 de marzo Problemas y dudas

24 de marzo EXAMEN

Bibliografía y otro material

En esta web hay unos apuntes de la materia, junto con una colección de problemas, con muchos de ellos resueltos.

Libros recomendados

- [*Sistemas de control proporcional, integral y derivativo: Algoritmos, análisis y ajuste*](#). de Alfaro (2024). Libro gratuito disponible en la página web del autor.
- [*Process Dynamics and Control*](#) de Seborg et al. (2017). La versión electrónica de este libro está disponible en el servicio de biblioteca de la UdL.

Otros libros disponibles en la UdL

Estos libros están disponibles en formato electrónico en la UdL:

- [*Process Control: Theory and Applications*](#) (Corriou 2018)
- [*Practical Process Control for Engineers and Technicians*](#) (Wolfgang Altman, David MacDonald, y Steve MacKay 2005)
- [*Measurement and Instrumentation*](#). (Morris y Langari 2012)

Otros libros

Estos libros se distribuyen de manera gratuita por internet. Aunque están traducidos al castellano, la traducción es mejorable y puede ser recomendable la lectura de la versión original en inglés:

- [*Dinámica y Controles de Procesos Químicos*](#) (Woolf 2022)
- [*Introducción a los Sistemas de Control*](#) (Iqbal 2022)

Otro material

Un libro gratuito sobre control de procesos es [Control Systems](#). El libro se puede consultar en línea, también hay disponible una versión para imprimir y otra en pdf. El libro es de distribución gratuita. Es una fuente de información muy recomendable

El MIT ofrece a través de su iniciativa [Opencourseware](#) el material docente de muchos de sus cursos. Hay material de varias asignaturas relacionadas con el control de procesos desde diferentes puntos de vista, como pueden ser los de la ingeniería química, electrónica o aeronáutica. Uno de los cursos de temática más similar es [10.450 Process Dynamics, Operations, and Control](#).

Canales de Youtube:

- [Control Automático Educación](#) de Sergio Andrés Castaño Giraldo.
- [Control System Lectures](#) de Brian B. Douglas.
- [Control Bootcamp](#) de Steve Brunton: Buena colección de vídeos para profundizar en la materia.

Webs de interés

- [Control Engineering](#)
- [Feedback and Temperature Control](#)

1 Introducción al control de procesos

Introducción

En esta unidad se hace una introducción cualitativa en la que se introduce el concepto de **control de procesos**. Aunque el tema no es complicado, se introducen muchas definiciones que son clave para las siguientes unidades. Es imprescindible dominar los siguientes aspectos del tema:

- Descripción de un sistema de control por retroalimentación
- Identificar las diferentes variables de un sistema de control
- Conocer los conceptos generales que se presentan en la unidad

Advertencia

Es imprescindible conocer bien todos los conceptos que se presentan en esta unidad. Ni son muchos, ni son complicados, pero suponen un buen número de errores en los exámenes.

1.1 Breve historia del control de procesos

1.1.1 En la antigüedad

Los primeros sistemas de control conocidos, ya en la antigüedad, son mecanismos destinados al control del caudal para regular un reloj de agua o el control de nivel de líquido en una lámpara de aceite o en un recipiente de vino, que se mantiene lleno a pesar de los muchos vasos que se sacan. De hecho, el control del caudal de fluido se reduce al control del nivel del fluido, ya que un pequeño orificio producirá caudal constante si la presión es constante. El mecanismo de control de nivel de líquido inventado en la antigüedad y todavía usado para controlar nivel es la válvula flotante, semejante a la del depósito de agua de un inodoro corriente. El flotador está hecho de tal manera que, cuando el nivel baja, el caudal del depósito aumenta y cuando el nivel sube, el caudal disminuye y, si es necesario, se corta (Figura 1.1). En este caso el sensor y el actuador están combinados en el mismo dispositivo, el flotador y la combinación de tubo de alimentación.

1.1.2 Durante la revolución industrial

Un caso más moderno de control por retroalimentación es el control de temperatura de un horno para calentar una incubadora, sistema que fue diseñado por [Cornelius Drebbel](#) (hacia 1620). El horno constaba de una caja que contenía el fuego, con un tubo en la parte superior provisto de un regulador de tiro (Figura 1.2). Dentro de la cámara de combustión estaba la incubadora de paredes dobles y el hueco que quedaba entre las paredes se llenaba de agua. El sensor de temperatura era un recipiente de vidrio lleno de alcohol y mercurio colocado en la cámara de agua en torno a la incubadora. A medida que el fuego calentaba la caja y el agua, el alcohol se dilataba y el vástago con flotador se desplazaba hacia arriba, bajando el regulador de tiro sobre la boca del tubo. Si la caja está demasiado fría, el alcohol se contrae, el regulador de tiro se abre y el fuego arde más fuertemente. La temperatura deseada está determinada por la longitud del vástago del flotador, que determina la apertura del regulador de tiro para una dilatación determinada de alcohol.

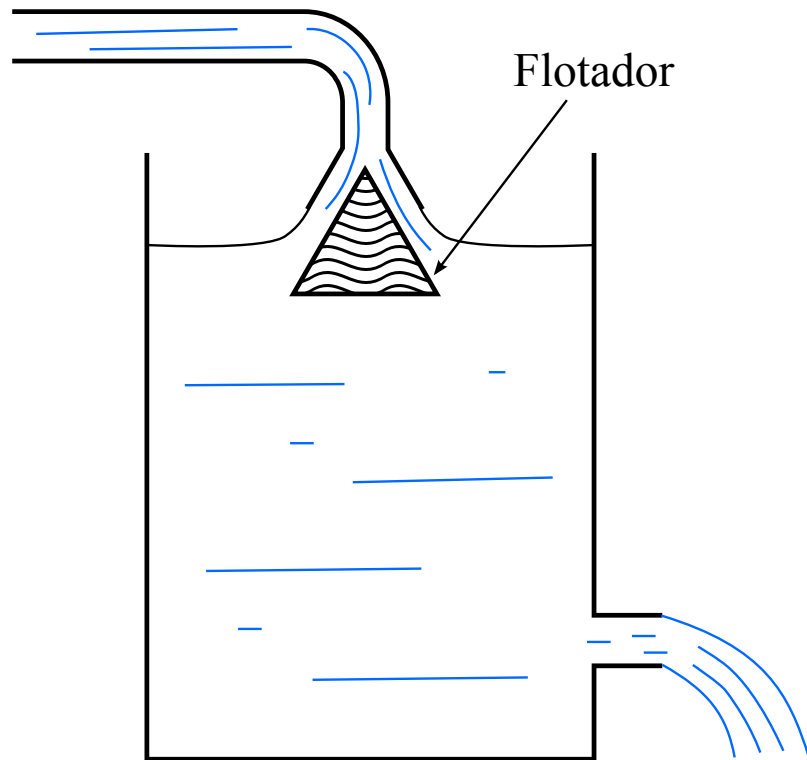


Figura 1.1: Un tonel que nunca se acaba. Ejemplo del control de nivel de líquido y caudal tal como se realizaba en la antigüedad.

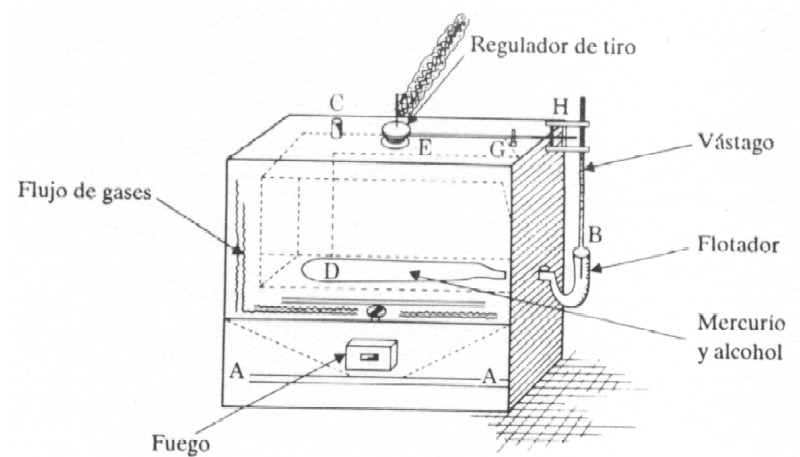


Figura 1.2: Croquis de la incubadora de Drebbel para empollar huevos de gallina.

La búsqueda de un medio para controlar la velocidad de rotación de un eje fue un problema famoso en las crónicas del control automático. La principal motivación era la de controlar automáticamente la velocidad de la piedra de molienda de un molino de viento harinero. De los varios métodos que se intentaron, el más prometedor resultó ser el que usaba un péndulo cónico, o regulador de bola flotante. Este dispositivo se usó para medir la velocidad del molino; las aspas del molino de viento se hacían girar con cuerdas y poleas, casi como persianas, para mantener una velocidad fija. Pero no fue el molino de viento es que hizo famoso el regulador de bola flotante, fue su adaptación a la máquina de vapor en los laboratorios de [James Watt](#), alrededor de 1788 (Figura 1.3).



Figura 1.3: Máquina de vapor con un regulador centrífugo o de bola flotante, que aparece en la parte derecha de la imagen.

La acción del regulador centrífugo es fácil de describir. Supongamos que la máquina está operando en equilibrio y aplicamos de pronto una carga. En ese momento disminuirá la velocidad de la máquina y las bolas del regulador caerán a un cono más pequeño. De este modo, el ángulo de las bolas se usa como sensor de salida. Esta acción, a través de palancas, abrirá la válvula principal al núcleo de vapor (que es el actuador) y admitirá más vapor a la máquina, recuperando la totalidad de la velocidad perdida. Para mantener la válvula de vapor en una nueva posición es necesario que las bolas giren a un ángulo diferente, lo que implica que la velocidad con una carga no es exactamente la misma que la anterior. Para recobrar la misma velocidad en este sistema, sería necesario reponer la velocidad deseada cambiando la longitud de la barra de la palanca a la válvula. Otros inventores introdujeron mecanismos que integraron el error de velocidad y así proporcionaron una reposición automática. Estos sistemas tienen error estacionario cero a perturbaciones constantes.

Watt fue un hombre práctico, como el constructor de molinos anterior a él, y no se ocupó de análisis teóricos del regulador. En este sentido son de gran importancia las contribuciones de [G.B. Airy](#), que fue profesor de matemáticas y astronomía de la Universidad de Cambridge desde 1826 a 1835 y Astrónomo Real en el Observatorio de Greenwich desde 1835 a 1881. Airy se interesó por el control de la velocidad; si sus telescopios hubieran podido girar en sentido contrario a la Tierra, se habría podido observar una estrella fija durante largos períodos de tiempo. Él utilizó el regulador centrífugo de péndulo y descubrió que era capaz de movimiento inestable. Airy realizó la primera exposición histórica de la inestabilidad en un sistema de control, el análisis de un sistema a través de ecuaciones diferenciales y, por tanto, los comienzos del estudio de la dinámica de control con retroalimentación.

1.1.3 Inicios teóricos

El primer estudio sistemático de la estabilidad del control retroalimentado apareció en el trabajo *On Governors* de [J.C. Maxwell](#) (1868). En este trabajo, Maxwell desarrolla las ecuaciones diferenciales del regulador, linealizándolas en torno al equilibrio, y estableció que la estabilidad depende de que las raíces de una cierta ecuación (característica) tengan partes reales negativas. Lo consiguió solamente para los casos de segundo y tercer orden. El problema de la determinación de criterios de estabilidad sirvió para el premio Adams de 1877, que fue ganado por [E.J. Routh](#). Su criterio, desarrollado en

el ensayo que obtuvo el premio, tiene el interés suficiente como para que los ingenieros de control sigan aprendiendo a aplicar su sencilla técnica. El análisis de la ecuación característica siguió siendo el fundamento de la teoría de control hasta la invención del amplificador retroalimentado electrónico por [H.S. Black](#) en 1927 en los laboratorios de la Bell Telephone. Después de la publicación del trabajo de Routh, el matemático ruso [A.M. Lyapunov](#) comenzó a estudiar la cuestión de la estabilidad del movimiento; en 1892 utilizó las ecuaciones no lineales de movimiento e incluyó resultados equivalentes al criterio de Routh. Su trabajo fue fundamental, pero no se introdujo en la literatura de control hasta 1958.

Con la introducción de los amplificadores electrónicos, las llamadas a larga distancia llegaron a ser posibles en las décadas posteriores a la Primera Guerra Mundial. Sin embargo, conforme la distancia aumenta, lo hace la pérdida de energía eléctrica, a pesar del uso del alambre de gran diámetro, y se requieren más y más amplificadores para reemplazar las pérdidas. Lamentablemente, con tantos amplificadores había mucha distorsión ya que las pequeñas no linealidades de los tubos de vacío se multiplicaban una y otra vez. Como solución a este problema, Black propuso el amplificador retroalimentado. Para reducir la distorsión hay que aumentar la retroalimentación, es decir, la ganancia del lazo del actuador debe aumentarse mucho. Todos los que han tratado de subir el volumen en un sistema de amplificación público mal ubicado han experimentado lo descubierto por Black; con altas ganancias el lazo de retroalimentación comienza a pitar y es inestable. Aquí, en una tecnología diferente estaba el problema de estabilidad de Maxwell y Routh, y la dinámica era tan compleja (las ecuaciones diferenciales de orden 50 son muy comunes) que el criterio de Routh no sirvió de mucho. Los ingenieros de comunicaciones estaban familiarizados con la idea de respuesta de frecuencia y con matemáticas de variable compleja desarrollada por Cauchy y otros, así que los trabajos en los laboratorios de la Bell se orientaron al análisis complejo. En 1932, [H. Nyquist](#) publicó un artículo describiendo como determinar la estabilidad desde un gráfico de la respuesta de frecuencia del lazo. A partir de esta teoría se desarrolló una extensa metodología de diseño de amplificadores retroalimentados, descrita en el libro de [H.W. Bode](#) (1945).

1.1.4 Implantación en la industria

Simultáneamente al desarrollo del amplificador retroalimentado, el control retroalimentado de procesos industriales empezó a ser la norma. En este campo, caracterizado por procesos que no solamente son muy complejos sino también no lineales y sujetos a retrasos de tiempo relativamente largos entre actuador y sensor, se desarrolló la práctica del control proporcional, más integral y más diferencial, el control PID descrito por Callender, Hartree y Porter (1936). Esta tecnología, basada en un amplio trabajo experimental y aproximaciones linealizadas simples al sistema dinámico, llevó a experimentos estándar apropiados para la aplicación en el campo y finalmente a una satisfactoria sintonía de los coeficientes del controlador PID. También se desarrollaron en esta época los dispositivos para guía y control de aviones; especialmente importante fue el desarrollo de sensores adecuados para medición de altura y velocidad de los aviones.

Se dio un enorme impulso al control retroalimentado durante la Segunda Guerra Mundial. En Estados Unidos, ingenieros y matemáticos del Laboratorio de Radiación del MIT combinaron sus conocimientos para aportar juntos no solamente la teoría de los amplificadores retroalimentados de Bode y el control PID de los procesos, sino también de procesos estocásticos desarrollados por [N. Wiener](#) (1930). El resultado fue el desarrollo de un conjunto completo de técnicas para el diseño de mecanismos de control, o servomecanismos, como también han sido llamados.

Otro enfoque al diseño de sistemas de control se introdujo en 1948 por [W.R. Evans](#), que trabajaba en el campo de guía y control de aviones. Muchos de estos problemas tiene estados dinámicos inestables o neutralmente estables, y él sugirió un retorno al estudio de la ecuación característica que había sido la base del trabajo de Maxwell y Routh 70 años antes. Sin embargo, Evans desarrolló técnicas y reglas que permiten seguir gráficamente los pasos de los lugares geométricos de las raíces de la ecuación

característica cuando se cambiaba un parámetro. Su método, el lugar geométrico de las raíces, es adecuado para el diseño y análisis de estabilidad y continúa siendo hoy día una técnica importante.

Tip

Para conocer más sobre la historia del control de procesos se pueden consultar los siguientes libros:

- Mayr, Otto. The Origins of Feedback Control. The Massachusetts Institute of technology, 1970. (Mayr 1970): Este libro cubre la historia del control de procesos desde la antigüedad hasta el s. XIX.
- Bennett, S. A History of Control Engineering 1800-1930. Control Engineering 8. The Institution of Engineering and Technology, 1979. (S. Bennett 1979)
- Bennett, S. A History of Control Engineering, 1930-1955. IEE Control Engineering Series 47. Stevenage, Herts., U.K: P. Peregrinus on behalf of the Institution of Electrical Engineers, London, 1993. (S. Bennett 1993)

1.2 Contexto de la disciplina

Una industria alimentaria es una serie de operaciones básicas (bombas, intercambiadores de calor, evaporadores, etc.) integradas de una manera sistemática y racional.

El proceso, entre otros requerimientos, debe cumplir con las exigencias de:

1. **Seguridad.**
2. **Especificaciones de producción:** La planta debe producir la cantidad y la calidad de productos finales requeridos.
3. **Regulaciones medioambientales.**
4. **Restricciones de proceso:** Las bombas no pueden trabajar si no tienen una succión neta positiva en cabeza, los tanques no pueden rebosar o vaciarse completamente, etc.
5. **Economía:** El proceso debe trabajar en los niveles óptimos de mínimo gasto económico y máximo beneficio.

Para cumplir estos objetivos se debe constituir el sistema de control, que está formado por personas (diseñadores de planta, operadores de planta) y equipo (dispositivos de medida, válvulas, controladores, ordenadores). El sistema de control para cumplir estos objetivos debe:

1. Suprimir la influencia de perturbaciones externas.
2. Asegurar la estabilidad del proceso.
3. Optimizar el rendimiento del proceso.

1.3 Descripción cualitativa de un ejemplo de proceso alimentario y sus sistemas de control

Una planta de pasteurización es un buen ejemplo de procesos alimentario.

Cumple los requerimientos de todo proceso:

1. *Seguridad:* Se deben minimizar los riesgos del proceso. Para el ejemplo, trabajar con fluidos calientes, riesgos de contaminación, etc.

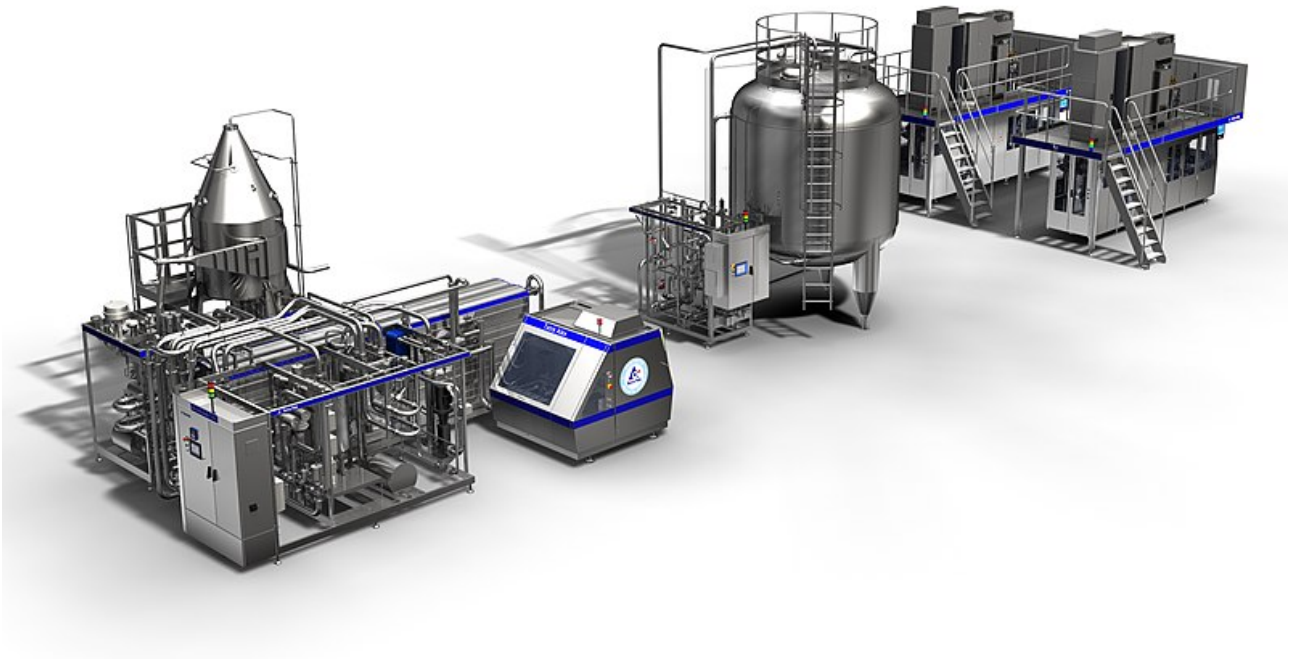


Figura 1.4: Esquema de una planta de homogeneización y esterilización térmica de leche. (cc by-sa 2.0 Tetra Pak)

2. *Especificaciones de producción*: Las comentadas en el apartado anterior.
3. *Regulaciones medioambientales*: Si no lo están en el proceso sí que lo están, por ejemplo, en las calderas que calientan el agua para la obtención de vapor.
4. *Restricciones de proceso*: Las comentadas en el apartado anterior.
5. *Economía*: Las comentadas en el apartado anterior.

Como ejemplos de magnitudes a controlar en el proceso se encuentra el nivel de los depósitos, caudales, porcentaje de la materia grasa de la leche, temperaturas de salida de los intercambiadores de calor.

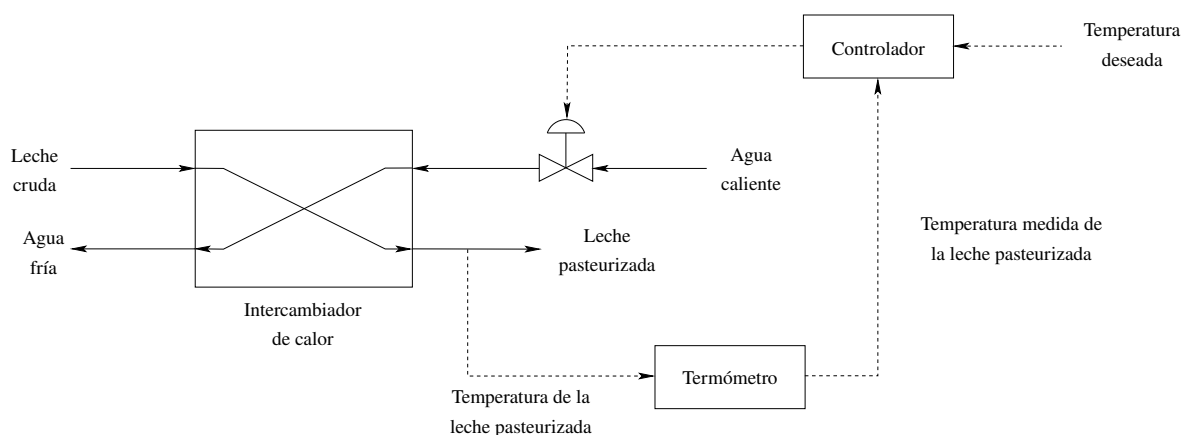


Figura 1.5: Esquema del sistema de control de temperatura de un pasteurizador de leche.

El sistema de control debe cumplir los objetivos propuestos:

1. Suprimir la influencia de perturbaciones (cambios en las variables de proceso no deseados) externas: P.ej., variaciones en la temperatura de los servicios –vapor, agua caliente o fluido

refrigerante– en los intercambiadores de calor de placas.

2. Asegurar la estabilidad del proceso.
3. Optimización del rendimiento.

No es sencillo justificar las mejoras en el sistema de control de un proceso debido, entre otras, a las siguientes razones:

1. Pequeños márgenes de beneficio.
2. Disponibilidad de los productos agrícolas por temporadas.

Las razones más normales para mejorar el sistema de control son:

1. Aumentar la producción.
2. Reducir la mano de obra.

que normalmente no son adecuadas para la industria agroalimentaria. Los procesos alimentarios son generalmente complejos de automatizar. Las materias primas de este tipo de industrias presentan una mayor variabilidad frente a otro tipo de materias primas de otras industrias. En muchos casos, además, esta variabilidad es difícil o imposible de medir. Es el caso de productos con mal aspecto, olor o sabor. Mientras que el color puede ser medido de manera sencilla, no existen sistemas de medición *in-line* para las magnitudes anteriores.

Este panorama lentamente va cambiando a medida que la industria de los alimentos va adoptando soluciones tecnológicas desarrolladas para otro tipo de industrias. También va desarrollando nuevas soluciones que se adapten a sus características, como puede ser sensores adecuados.

1.4 Conceptos generales

1. **Dinámica:** Comportamiento de un proceso dependiente del tiempo. En la teoría del control se estudia básicamente la dinámica de dos tipos de sistema:

1. *Sistema de lazo abierto:* Respuesta del sistema sin controladores o con un control en adelanto (*feedforward*).
2. *Sistema de lazo cerrado:* Comportamiento del sistema incluido un control por retroalimentación (*feedback*).

Tip

En el [Problema 1.01](#) a) se muestra la diferencia existente en un sistema de control de un tostador de pan si el control es de lazo abierto (control en adelanto) o si es de lazo cerrado (control por retroalimentación).

2. **Variables:** A continuación se definen los diferentes tipos de variables implicados en la dinámica y control de sistemas:

1. *Variables manipulables:* Elementos del proceso que se pueden modificar para controlar la planta. Normalmente se trata de caudales.
2. *Variables controladas:* Parámetros de proceso –caudales, niveles, temperaturas, presiones, etc.– que se quieren controlar, ya sea para mantenerlos constantes o para seguir una cierta evolución con el tiempo.

3. *Variables no controladas*: Variables del proceso que no son controladas aunque pueden ser medidas.
4. *Perturbaciones*: Entradas al proceso que no pueden ser controladas pero que deben tener un valor fijo en el proceso.
3. **Consigna (*Set point*)**: Es el valor deseado de la variable a controlar. Puede ser constante o variar con el tiempo.
4. **Control en adelante (*Feedforward*)**: Se trata de un sistema de control de lazo abierto. Se detecta la perturbación cuando entra en el proceso y se realiza el cambio necesario en las variables manipulables para que la variable controlada se mantenga constante.

 Tip

Se muestra un sistema de control en adelante en el [Problema 1.01 b](#)). Se trata del sistema de control de una lavadora.

Para este sistema es necesaria una calibración del sistema de control. Es importante resaltar que no se mide en ningún momento la variable controlada.

 Tip

En el apartado c) del [prob. 1.1](#) se muestra que el sistema de control automático de un avión es un sistema de control por retroalimentación.

5. **Control por retroalimentación (*Feedback*)**: Se mide la variable controlada a la salida del proceso y se compara con la consigna (el valor deseado de la variable controlada). La diferencia (error) se alimenta al controlador por retroalimentación que modifica la variable manipulable.

 Tip

En el [Problema 1.02](#) hay una discusión sobre las ventajas e inconvenientes del control por retroalimentación y en adelante de un sistema de control de temperatura de un edificio.

Tabla 1.1: Comparativa de los controladores en adelante y los controladores por retroalimentación.

Control en adelante	Control por retroalimentación
Actúa antes de que la perturbación sea introducida en el sistema.	No inicia la acción de control hasta que aparece la perturbación.
Bueno para sistemas lentos (multicapacidad) o con tiempos muertos significativos.	Es insatisfactorio para procesos lentos con tiempos muertos significativos.
No introduce inestabilidad debida a la respuesta de ciclo cerrado.	La respuesta de bucle cerrado puede crear inestabilidad.
Requiere un buen conocimiento del modelo del proceso.	Requiere la identificación de las posibles perturbaciones y su medida directa.
Es sensible a los errores de modelado.	No puede operar con perturbaciones no medibles.
Es insensible a los cambios de parámetros.	Sensible a las variaciones de los parámetros del proceso.

6. **Estabilidad**: Un proceso es inestable si su salida se va haciendo mayor (positiva o negativamente) con el tiempo.

La mayoría de los sistemas de lazo abierto son estables. Todos los sistemas de lazo cerrado son inestables si la ganancia del controlador se hace lo suficientemente grande. Normalmente, el rendimiento del controlador aumenta con la ganancia, pero disminuye su tolerancia a los cambios de parámetros del proceso.

7. **Control analógico:** En este caso los datos son medidos de manera continua en el tiempo.
8. **Control digital:** Se da cuando los datos son medidos de manera discreta ya sea debido a la utilización de computadores digitales o debido a métodos de medida muy lentos en comparación con la dinámica del proceso. P.ej., análisis mediante cromatografía.
9. **Leyes del Control de Procesos:**
 1. *Primera ley:* El sistema de control más simple es el que mejor funcionará.
 2. *Segunda ley:* Se debe entender el proceso antes de intentar controlarlo.
10. **Elementos físicos de un sistema de control:**
 1. *Instrumentos de medida o sensores:* Son los elementos de control encargados de medir las perturbaciones, las variables controladas, etc. Son las principales fuentes de información de cómo va el proceso. Un elemento crucial para la selección de un sensor es su capacidad de transmitir información fácilmente. P.ej., es preferible un termopar a un termómetro de mercurio.
 2. *Transductores:* Elementos del sistema de control que convierten magnitudes físicas que no pueden ser utilizadas para el control en otras que sí lo pueden ser (una corriente eléctrica o una señal neumática, p.ej.). P.ej., convertir una señal de presión en una señal eléctrica.
 3. *Lineas de transmisión:* Llevan la señal desde el sensor al controlador y del controlador al elemento final de control. La transmisión acostumbra a ser eléctrica o neumática. Frecuentemente se debe amplificar la señal del sensor antes de transmitirla.
 4. *Controlador:* Recibe las señales de los sensores y decide la acción que se debe tomar.
 5. *Elemento final de control:* Es el dispositivo físico que lleva a cabo la decisión del controlador. Típicamente, es una válvula, aunque también puede ser una bomba de velocidad variable, una compuerta u otros actuadores.
 6. *Registradores:* Proveen de un soporte visual y registro histórico del funcionamiento del sistema.

1.5 Problemas

Problema 1.1

Identificar si el sistema de control para los siguientes equipos es de lazo abierto (en adelante, *feedforward*) o cerrado (retroalimentación, *feedback*):

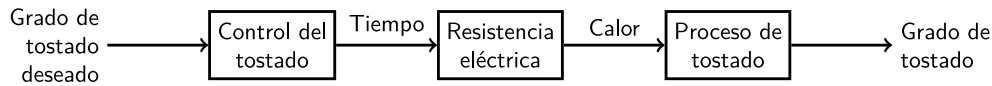
- a. Un tostador de pan automático
- b. Una lavadora
- c. El piloto automático de un avión.

Asimismo, identificar las entradas y salidas de los sistemas mencionados. Indicar posibles sistemas de control de lazo cerrado para aquellos equipos que los tengan de lazo abierto.

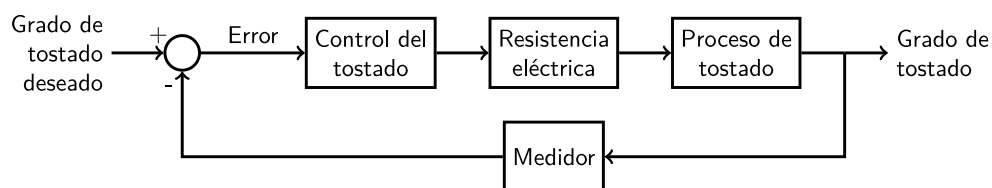
💡 Solución

a) Un tostador de pan automático

Se trata de un sistema de control en adelante (de lazo abierto o *feed-forward*, las tres denominaciones significan lo mismo). El objetivo de control es lograr un determinado grado de tostado, para lograrlo se fija el tiempo de tostado en el sistema de control del tostador, para ello se fija el tiempo durante el cual se suministrará energía en forma de calor a la tostada. Este lazo abierto de control se puede ver en el siguiente diagrama de bloques:



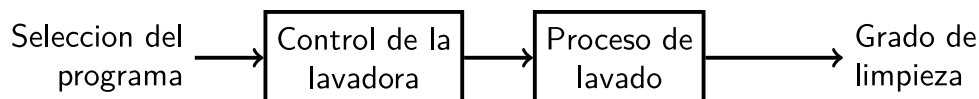
También se podría diseñar un sistema de control de lazo cerrado, también denominado por retroalimentación o *feedback*:



El medidor del grado de tostado podría medir el color en la superficie de la tostada, de manera que se logrará siempre tener el grado de tostado óptimo. Así se evitaría el problema más habitual de los tostadores: la primera tostada sale bien, pero las siguientes acostumbran a salir demasiado tostadas, ya que el sistema de control en adelante no tiene en cuenta el hecho de que el tostador está caliente.

b) Una lavadora

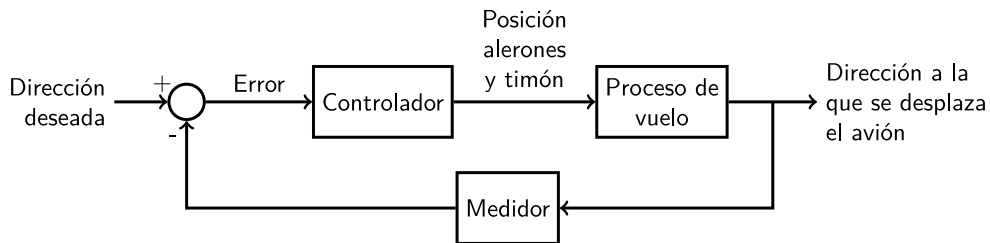
El sistema de control de una lavadora vuelve a ser un sistema de control en adelante. En este caso, el objetivo del sistema de control es el *grado de limpieza*. Al seleccionar un programa de lavado se busca obtener un cierto grado de limpieza de la ropa, aunque este grado de limpieza no se mide en ningún momento. El sistema de control simplemente proporciona una serie de órdenes consistentes en aperturas y cierres de válvulas, tiempo durante el que tiene que estar girando el tambor, conectar y desconectar la resistencia que calienta el agua, etc. Se puede plantear el siguiente diagrama de bloques:



Se puede diseñar fácilmente un sistema de control por retroalimentación (lazo cerrado). Este sistema continuaría utilizando un sistema de control en adelante para la gestión de los diferentes programas, pero utilizaría un sistema de control por retroalimentación para determinar cuándo debe renovar el agua de lavado, lo que supone un ahorro en el consumo de agua, ya que no se sustituiría hasta que no fuese estrictamente necesario. Para ello mediría la turbidez del agua mediante un sensor adecuado. En el momento que el agua no fuera lo suficientemente transparente (lo que indicaría que ya no tiene más capacidad de eliminar la suciedad de la ropa), la lavadora procedería a su sustitución. Este sistema de control ya está disponible en algunas lavadoras de gama alta.

c) El piloto automático de un avión

En este caso el sistema de control es por retroalimentación. Se marca al piloto automático una dirección de vuelo, el sistema de control mide la dirección del avión y según el error entre la dirección seguida y la deseada (consigna) se marcan la posición de los alerones y del timón, lo que hace modificar la dirección actual del avión para acercarla a la deseada. Un diagrama de bloques simplificado sería el siguiente:



Problema 1.2

Describir sistemas de control adecuados para regular la temperatura de un edificio en los que se mida:

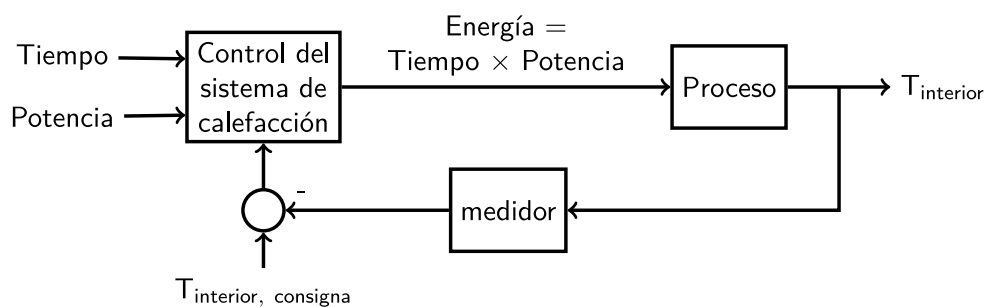
- La temperatura interior
- La temperatura exterior

Discutir las ventajas e inconvenientes de las diferentes posibilidades.

💡 Solución

a) La temperatura interior

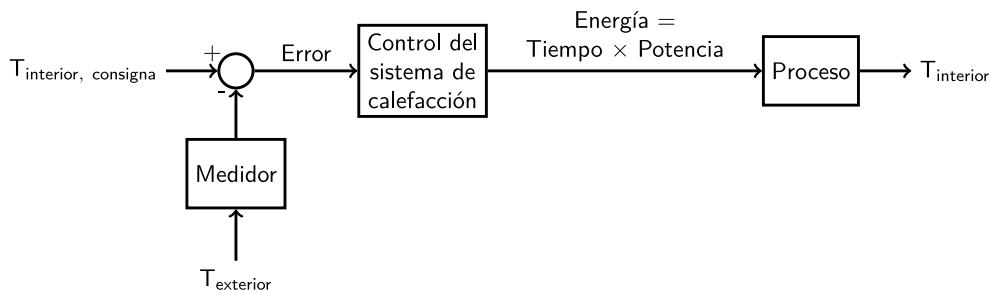
En este caso, la solución más sencilla es diseñar un sistema de control por retroalimentación, como muestra el diagrama de bloques siguiente:



El medidor mide la temperatura interior de la local que deseamos mantener a una temperatura constante. El valor medido de la temperatura se envía a un comparador, con lo que se obtiene la diferencia de temperatura existente entre la medida y la deseada. Ese error se envía al controlador que actúa sobre el sistema de calefacción. Este sistema de calefacción suministra una cierta potencia. El sistema de control “decide” durante cuánto tiempo se debe suministrar potencia al local, es decir, cuánta energía se suministra para aumentar la temperatura, si la temperatura interior es inferior a la de consigna.

b) La temperatura exterior

En este caso se opta por seleccionar un sistema de control de lazo abierto, como el que muestra el diagrama de bloques siguiente:



En este caso se mide, utilizando un termómetro, la temperatura exterior y se compara con la temperatura interior deseada. El error obtenido se lleva al sistema de control de la calefacción, este controlador en función del error decide la cantidad de energía (es decir, durante cuánto tiempo se debe suministrar potencia al local) para alcanzar la temperatura interior deseada.

Ventajas de cada uno de los sistemas

El lazo abierto presenta la ventaja de evitar los posibles problemas que puede significar el tener que controlar un sistema con una gran inercia, como puede ser el sistema de calefacción de un edificio. Estos sistemas responden a los cambios muy lentamente, lo que significa que presentará bastantes problemas (como se verá en temas posteriores) a la hora de diseñar el sistema de control por retroalimentación.

El principal problema del sistema de lazo abierto es que debe de tener una buena curva de calibrado (que relacione el error con la cantidad de energía que se debe suministrar para lograr la temperatura interior deseada) para funcionar correctamente.

Problema 1.3

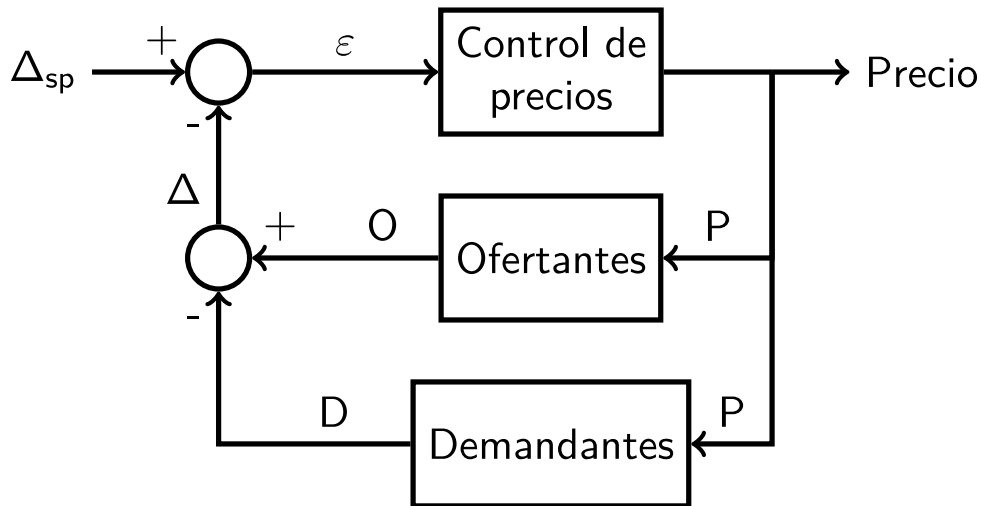
¿Qué tipo de acción de control tienen los actuales sistemas de regulación del tránsito de vehículos en las ciudades? ¿Cómo se podrían mejorar estos sistemas de regulación?

Problema 1.4

Explicar como el concepto económico conocido como la ley de la oferta y la demanda se puede interpretar como un sistema de control por retroalimentación. Escoger el precio del mercado de un artículo en particular como la salida del sistema y suponer que el objetivo del sistema es mantener la estabilidad en el precio.

Solución

Se puede plantear el siguiente diagrama de bloques que describe el funcionamiento de la ley de la oferta y la demanda:



donde:

- P es el precio
- D es la cantidad de producto demandada/año
- O es la cantidad de producto ofertada/año
- $\Delta = O - D$, es la diferencia entre la cantidad de producto ofertada y demandada
- $\Delta_{sp} = 0$, ya que el objetivo del mercado es igualar la oferta con la demanda a través de la variación de los precios
- $\varepsilon = \Delta_{sp} - \Delta = D - O$, es el error del que alimenta al control de precios

Se puede comprobar cualitativamente que el sistema funciona. Por ejemplo, si la cantidad de producto ofertada/año es mayor que la cantidad demandada, $\Delta > 0$. Como consecuencia $\varepsilon < 0$, lo que implica que el precio disminuye.

Problema 1.5

Se utiliza un tanque agitado para calentar una corriente líquida. Para ello se dispone de un serpentín en el interior del tanque por el que se hace circular vapor. Proponer diferentes alternativas de sistemas de control para que se cumplan los siguientes objetivos:

- mantener la temperatura del effluente a una cierta temperatura de consigna, y,
- mantener el volumen de líquido en el tanque constante a un cierto valor de consigna.

2 Instrumentación industrial

Este capítulo está dedicado a los elementos físicos que componen un sistema de control industrial, como son medidores, controladores o actuadores. Lamentablemente, no tenemos tiempo suficiente para poder dedicar tiempo a este tema, que es de profundo interés.

Una fuente de información interesante son las webs de los diferentes fabricantes de equipos de instrumentación industrial. Podemos destacar algunos entre los muchos existentes:

- [Omega](#)
- [Endress+Hauser](#)
- [Emerson](#)

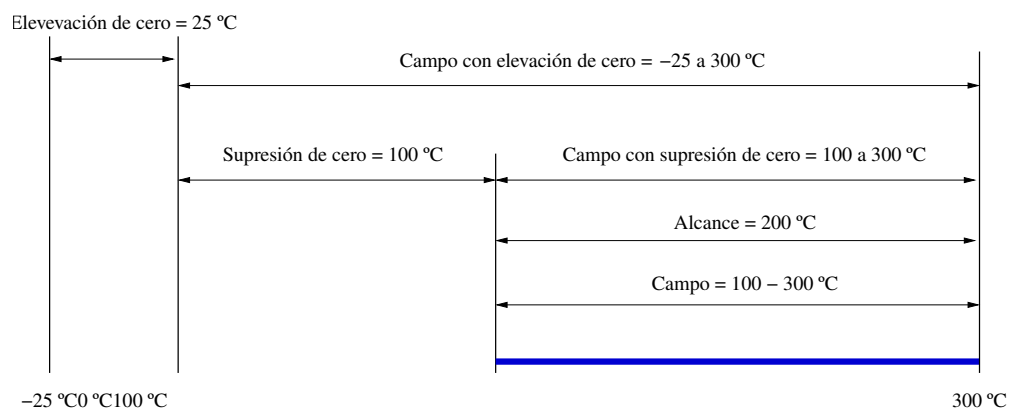
En el capítulo **3: Sensores y Actuadores** de Woolf (2022) se puede encontrar una descripción más detallada de los sensores más utilizados en la industria alimentaria.

2.1 Algunas definiciones de instrumentación

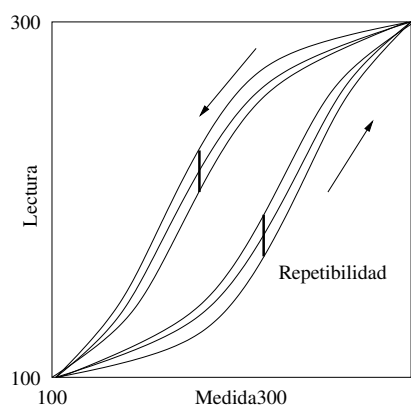
A continuación se definen unos cuantos conceptos de uso frecuente en el campo de la instrumentación:

1. **Campo de medida** (*range*): Espectro o conjunto de valores de medida que están comprendidos dentro de los límites superior e inferior de la capacidad de medida o de transmisión del instrumento. Viene expresado estableciendo los dos valores extremos. Para el ejemplo de la Figura 2.1 es de 100-300 °C.
2. **Alcance** (*span*): Es la diferencia algebraica entre los valores superior e inferior del campo de medida del instrumento. Para el ejemplo el valor es de 200 °C.
3. **Error**: Es la diferencia entre el valor leído transmitido por el instrumento y el valor real de la variable medida. El error medio del instrumento es la media aritmética de los errores determinados para todos los valores crecientes y decrecientes de la variable medida.
4. **Precisión** (*accuracy*): Es la tolerancia de media o de transmisión del instrumento y define los límites de los errores cometidos cuando el instrumento se emplea en condiciones normales de servicio. Se puede expresar de las siguientes maneras:
 1. Porcentaje del alcance. Para el ejemplo de la figura anterior una lectura de 150 °C y una precisión de 0.5 %, la lectura se encontrará entre 149 y 151 °C, ya que $150\text{ °C} \pm 0.005/200 = 150\text{ °C} \pm 1\text{ °C}$.
 2. Directamente. Por ejemplo, $\pm 1\text{ °C}$.
 3. Porcentaje de la lectura efectuada. Por ejemplo, precisión de $\pm 1\%$ de 150 °C, es decir, $\pm 1.5\text{ °C}$.
 4. Porcentaje del valor máximo del campo de medida. Precisión de $\pm 0.5\%$ de 300 °C, $\pm 1.5\text{ °C}$.

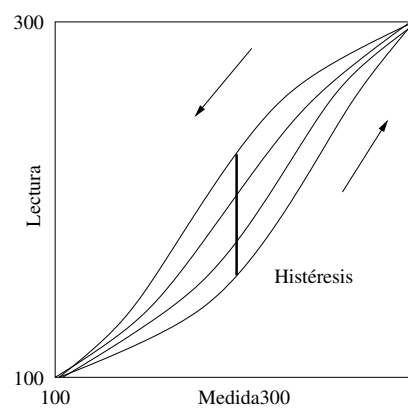
La precisión varía en cada punto del campo de medida, el fabricante la especifica en todo el margen del instrumento indicando a veces su valor en algunas zonas de la escala. Cuando se desea obtener la máxima precisión en un punto determinado de la escala, se puede calibrar únicamente para este punto de trabajo, sin considerar los valores restantes del campo de medida.



a)



b)



c)

Figura 2.1: Representación gráfica de algunas de las definiciones de los instrumentos. En b) y c) las flechas indican el sentido de la medida. En c), se ha exagerado la histéresis para que su efecto fuera más visible.

5. **Zona muerta** (*dead zone* o *dead band*): Es el campo de valores que no hace variar la indicación o señal de salida del instrumento, es decir, que no produce su respuesta. Viene dada como porcentaje del alcance de la medida. Para el instrumento de la figura es de $\pm 1\%$, es decir, $\pm 0.001 \cdot 200\text{ }^{\circ}\text{C} = \pm 0.2\text{ }^{\circ}\text{C}$.
6. **Sensibilidad** (*sensitivity*): Es la razón entre el incremento de la lectura y el incremento de la variable que la ocasiona, después de alcanzarse el estado de reposo. Por ejemplo, si en un transmisor electrónico de 0-10 mbar, la presión pasa de 5 a 5.5 bar y la señal de 11.9 a 12.3 mA (en una línea 4-20 mA), la sensibilidad es:

$$\frac{\frac{12.3\text{ mA}-11.9\text{ mA}}{20\text{ mA}-4\text{ mA}}}{\frac{5.5\text{ bar}-5\text{ bar}}{10\text{ bar}}} = \pm 0.5$$

También puede venir expresada en forma de porcentaje del alcance de la medida. Si la sensibilidad del instrumento de la figura es de $\pm 0.05\%$, su sensibilidad será de $\pm 0.01\text{ }^{\circ}\text{C}$.

7. **Repetibilidad** (*repeatability*): Es la capacidad de reproducción de las medidas o señales de salida del instrumento al medir repetidamente valores idénticos de la variable en las mismas condiciones de servicio y en el mismo sentido de la variación, recorriendo todo el campo. Se considera en general su valor máximo (repetibilidad máxima) y se expresa como porcentaje del alcance, un valor representativo es el de $\pm 0.01\%$. El término de repetibilidad no incluye la histéresis.

Para determinarla, el fabricante comprueba la diferencia entre el valor verdadero de la variable y la indicación o señal de salida del instrumento recorriendo todo el campo, y partiendo, para cada determinación, desde el valor mínimo del campo de medida. La repetibilidad viene dada por la fórmula siguiente:

$$\text{Repetibilidad} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

De manera que para los datos de la tabla siguiente la repetibilidad es:

$$\text{Repetibilidad} = \sqrt{\frac{0.00785}{19}} = \pm 0.02\%$$

Tabla 2.1: Ejemplo de medidas de un instrumento recorriendo todo el campo de medida

Variable	Indicación	Variable	Indicación
Desde 0.0 a 0.5	0.502	Desde 0.0 a 5.5	5.505
Desde 0.0 a 1.0	1.006	Desde 0.0 a 6.0	6.006
Desde 0.0 a 1.5	1.509	Desde 0.0 a 6.5	6.501
Desde 0.0 a 2.0	2.008	Desde 0.0 a 7.0	7.003
Desde 0.0 a 2.5	2.506	Desde 0.0 a 7.5	7.504
Desde 0.0 a 3.0	3.007	Desde 0.0 a 8.0	8.009
Desde 0.0 a 3.5	3.503	Desde 0.0 a 8.5	8.508
Desde 0.0 a 4.0	4.006	Desde 0.0 a 9.0	9.008
Desde 0.0 a 4.5	4.507	Desde 0.0 a 10.0	10.005
Desde 0.0 a 5.0	5.010		

8. **Histéresis** (*hysteresis*): Es la diferencia entre los valores indicados por el instrumento para un valor cualquiera del campo de medida cuando la variable recorre toda la escala en sentido ascendente y descendente. Se expresa como porcentaje del alcance.

Por ejemplo, si un termómetro de 0-100 °C, para el valor de la variable 40 °C, la temperatura es de 39.9 °C al subir la temperatura desde 0 °C, e indica 40.1 °C al bajar la temperatura desde 100 °C, el valor de la histéresis es de:

$$\frac{40.1\text{ }^{\circ}\text{C} - 39.9\text{ }^{\circ}\text{C}}{100\text{ }^{\circ}\text{C} - 0\text{ }^{\circ}\text{C}} 100 = \pm 0.2\%$$

2.2 Algo de instrumentación

2.2.1 Dispositivos de medida (sensores)

Para el correcto funcionamiento de un sistema de control es imprescindible una buena medida de la variable controlada y unas líneas de transmisión efectivas. Existe una gran cantidad de dispositivos de medida y su número aumenta día a día. Difieren entre sí tanto en el principio básico de medida como en su construcción. En la tabla siguiente se muestran algunos de los sensores más típicos en el control de procesos junto con sus posibles aplicaciones. Para una información más detallada generalmente hay que recurrir a los fabricantes de sensores.

Tabla 2.2: Principales sensores utilizados en la industria alimentaria

Variable de proceso medida*	Dispositivo de medida	Comentarios
Temperatura	• Termopares • Termómetros de resistencia • Termistores	Sistemas más comunes para temperaturas relativamente bajas
Presión	• Termómetros bimetalicos • Tubos de Bourdon • Diafragmas • Elementos piezoeléctricos • Elementos piezoresistivos	Basados en la deformación de materiales elásticos Utilizados para convertir la presión en una señal eléctrica
Caudal	• Placas de orificio • Medidores de Venturi • Tubos de Dahl • Medidores de turbina • Medidores magnéticos • Ultrasonidos • Medidores de caudal másico	Basados en la medida del pérdidas de carga del fluido
Nivel de líquidos	• Medidas de conductividad • Medidas dieléctricas • Medidores de radar • Dispositivos de desplazamiento • Flotadores • Medidores de presión • Medidores de ultrasonidos	Buenos con dos fases Acoplados a convertidores de señal
Composición	• Cromatógrafos • pHmetros	Requiere tiempos de análisis largos

Variable de proceso medida*	Dispositivo de medida	Comentarios
	• Analizadores IR • Analizadores UV	Convenientes para uno o dos compuestos químicos

A continuación se comenta con un poco de detalle cuatro de los dispositivos de medida más utilizados en la industria de procesos.

2.2.2 Medidores de caudal

Los medidores de caudal más utilizados en la industria son aquellos que miden una diferencia de presión en el fluido al pasar por un elemento en la línea que crea una pérdida de carga. Para calcular el caudal volumétrico que pasa por ese punto se recurre a la ecuación de Bernoulli. Los más típicos son la *placa de orificio*, más barata, y el *tubo de Venturi*, más caro pero de mayor precisión.

Un método diferente de medir el caudal volumétrico es la utilización de *turbinas*. En este caso se calcula el flujo a partir del número de vueltas de la turbina para un tiempo dado.

En general los medidores de caudal presentan dinámicas muy rápidas que normalmente pueden ser modeladas con la siguiente ecuación algebraica:

$$\text{caudal} = \alpha \sqrt{\Delta P}$$

donde α es una constante característica del medidor de caudal y ΔP es la diferencia de presión.

2.2.3 Sensores de temperatura

Los más comunes son aquellos que miden la temperatura como una señal eléctrica. Entre ellos cabe destacar los termopares. Independientemente de sus diferencias constructivas, su dinámica básica puede ser descrita en función de sus perfiles de temperatura. El elemento sensor de la temperatura siempre se encuentra en el interior de una vaina de metal. Los termopares pueden ser modelados siguiendo sistemas de primer orden o sistemas de segundo orden sobreamortiguados dependiendo de como estén contruidos y de los materiales utilizados.

2.2.4 Líneas de transmisión

En el caso de utilizar líneas de transmisión neumática muy largas puede ser que su efecto sobre la dinámica global del sistema no sea despreciable. Normalmente siguen una dinámica que puede ser descrita con la siguiente función de transferencia:

$$\frac{P_o}{P_i} = \frac{e^{-\tau_d s}}{\tau_p s + 1}$$

donde P_o es la presión de salida de la línea de transmisión neumática, P_i es la presión de entrada y $\tau_d/\tau_p \approx 0.25$.

2.2.5 Elementos finales de control

El elemento final de control más común es la válvula. El sistema de control cambia la posición del émbolo ya sea utilizando aire comprimido, si es una válvula neumática, o corriente eléctrica. Las válvulas neumáticas se distinguen principalmente en las *air-to-close* o *fail open*, en las que el émbolo desciende al aumentar la presión del aire. En caso contrario se trata de válvulas del tipo *air-to-open* o *fail closed*.

Las válvulas puede ser modelizadas siguiendo una dinámica de segundo orden. Pero para las válvulas pequeñas o de tamaño medio la dinámica es tan rápida que se puede considerar que es un proceso de primer orden. Para la mayoría de productos el caudal que pasa por la válvula puede ser descrito por la ecuación siguiente:

$$F = K f(x) \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}$$

donde ΔP es la caída de presión del fluido al paso de la válvula, K es una constante que depende del tamaño de la válvula, ρ es la densidad del fluido y $f(x)$ es una curva característica para la válvula.

Otros elementos finales de control pueden ser motores de velocidad variable para ventiladores o bombas, la puesta en marcha o apagado de equipos, sistemas electrohidráulicos, etc.

3 Como abordar la dinámica de un sistema

Introducción

Este es un capítulo clave del temario, ya que nos va a proporcionar las herramientas con las que podremos afrontar con éxito los siguientes temas. En este capítulo confluyen varias de las asignaturas que habéis estado viendo en los últimos años:

- *Matemáticas*: Utilizaremos operadores matemáticos, números complejos, ecuaciones diferenciales, límites, métodos numéricos y propiedades trigonométricas. (Pista: los números complejos y las oscilaciones suelen ir de la mano, como ya habéis visto, por ejemplo, en electricidad con la corriente alterna.)
- *Operaciones básicas*: Utilizaremos balances macroscópicos con el matiz interesante de que los realizaremos en estado no estacionario. Es una diferencia importante respecto a cuando se utilizan para diseño, donde se suelen plantear las operaciones en estado estacionario.

El objetivo de este capítulo es poder plantear modelos matemáticos de operaciones básicas que nos permitan poder simular su comportamiento, su dinámica, en el tiempo. Seguiremos esta secuencia:

1. Detallar el funcionamiento de la operación: Cuanto más conozcamos la operación, mejor será nuestro modelo matemático y las simulaciones serán más fiables
2. Plantear el modelo matemático de la operación utilizando balances no estacionarios, es decir, se tratará de ecuaciones diferenciales
3. Resolución de las ecuaciones diferenciales:
 - Solución analítica (si la hay): Resolver ecuaciones diferenciales, aunque sean ordinarias y no muy complejas, (como es nuestro caso) no es sencillo. Para simplificar la tarea recurriremos a una herramienta matemática que facilita mucho su resolución: la transformada de Laplace.
 - Solución mediante métodos numéricos: Cuando no sea posible la obtención de soluciones analíticas, utilizaremos una herramienta de modernización y simulación informática que nos permitirá resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales

Advertencia

En esta unidad se introducen muchos conceptos que, aunque no son difíciles una vez se dominan, requieren de práctica y un cierto pensamiento abstracto.

Hay que dedicar tiempo suficiente para practicar y asimilar las herramientas que se presentan, ya que su uso es clave en los temas siguientes.

La unidad se compone de los siguientes apartados:

Ejemplo de dinámica: Se explican los pasos a seguir para desarrollar el modelo matemático de una operación básica. Consideraremos que el modelo está terminado al plantear la ecuación o ecuaciones diferenciales.

Transformada de Laplace: Introducción de la transformada de Laplace como una herramienta útil para resolver ecuaciones diferenciales. Se introducirá la definición del operador y sus principales propiedades.

Función de transferencia: La función de transferencia nos permitirá trabajar con los modelos matemáticos sin tener que estar realizando la transformada de Laplace de manera continua.

Funciones singulares]: De cara a plantear las simulaciones es bueno conocer unas cuantas funciones matemáticas que, aunque son idealizaciones, son representativas de comportamientos del mundo real.

Inversión de la transformada de Laplace: Realizar la transformada de Laplace es sencillo, en cambio, realizar la operación inversa es mucho más complejo. Es una situación parecida a derivar e integrar. Las dos operaciones son importantes, pero resulta más complejo integrar que derivar. El problema es que es un paso imprescindible para obtener la solución de la ecuación diferencial planteada.

Expansión en fracciones simples: Técnicas para realizar la transformada inversa de Laplace.

Tablas de transformadas de Laplace: Se presentan las transformadas de Laplace y transformadas inversas de las funciones más habituales.

Tip

Aunque resolver las ecuaciones diferenciales, realizar las transformadas de Laplace y las transformadas inversas no es complicado, es una tarea tediosa.

Utilizaremos de manera habitual [SymPy](#), un [sistema algebraico computacional \(CAS\)](#), que nos eliminará gran parte del trabajo. Es recomendable saberlo utilizar, pero no es imprescindible para superar la asignatura.

3.1 Un ejemplo de dinámica de un sistema. ¿Qué se desea conocer?

Como ejemplo se considera un sistema dinámico de nivel. En este caso se pretende encontrar el comportamiento con el tiempo de un depósito en función del caudal de entrada. Para ello habrá que buscar un modelo matemático que describa dicho comportamiento. Se recomienda seguir el siguiente procedimiento:

1. Se realiza el *diagrama de flujo del sistema*: En ese diagrama se marcan todas las variables implicadas. En este caso se trata de un depósito que se descarga por gravedad. Las variables implicadas son:
 - Sección del depósito: $A(t)$
 - Resistencia de la tubería al paso del fluido: R
 - Caudales volumétricos de entrada y salida: $q_1(t)$ y $q_2(t)$
 - Nivel del depósito: $h(t)$
 - Densidad del fluido: $\rho(t)$
2. Planteamiento del *modelo matemático*: Un modelo matemático es un conjunto de ecuaciones que relacionan entre sí las variables del sistema. Se basan en ecuaciones de estado, leyes de equilibrio, ecuaciones cinéticas y balances de materia, energía y cantidad de movimiento.

Para el ejemplo, al aplicar el Balance Macroscópico de Materia:

$$\frac{dA(t)h(t)\rho(t)}{dt} = \rho(t)q_1(t) - \rho(t)q_2(t) \quad (3.1)$$

En el momento de plantear el modelo matemático hay que explicitar todas las hipótesis o simplificaciones realizadas. En este caso se han realizado las siguientes suposiciones:

- La densidad (ρ) y el área del depósito (A) son constantes e independientes del tiempo.

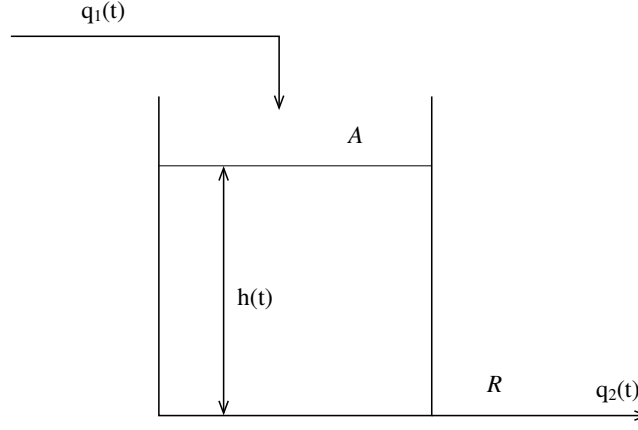


Figura 3.1: El nivel del depósito depende de los caudales de entrada y salida del mismo.

- El caudal de salida del depósito depende del nivel y de la resistencia de la tubería al paso del fluido de este modo: $q_2(t) = \frac{h(t)}{R}$.

Teniendo en cuenta las hipótesis anteriores la Ecuación 3.1 queda como:

$$A \frac{dh}{dt} = q_1(t) - \frac{h(t)}{R} \quad (3.2)$$

3. Definición de las *variables de desviación*: Debido a que lo realmente importante en control es conocer cuánto se ha desplazado el sistema respecto al estado estacionario se definen unas variables de desviación.

Para el ejemplo, el balance macroscópico de materia en estado estacionario es:

$$0 = q_{1e} - \frac{h_e}{R} \quad (3.3)$$

donde $_e$ indica estado estacionario.

Restando ambos balances macroscópicos de materia (Ecuación 3.1 y Ecuación 3.3):

$$A \frac{d(h(t) - h_e)}{dt} = q_1(t) - q_{1e} - \frac{h(t) - h_e}{R} \quad (3.4)$$

Se definen las siguientes variables de desviación:

$$\begin{aligned} H(t) &\equiv h(t) - h_e \\ Q_1(t) &\equiv q_1(t) - q_{1e} \end{aligned}$$

Las mayúsculas indican que se tratan de variables de desviación.

Sustituyendo en la Ecuación 3.4 se obtiene:

$$A \frac{dH(t)}{dt} = Q_1(t) - \frac{H(t)}{R} \quad (3.5)$$

Esta ecuación es el modelo matemático que representa la respuesta dinámica del tanque a cambios en el caudal de entrada. Resolviendo esta ecuación diferencial se puede saber cómo varía el nivel con el tiempo según cambia el caudal de entrada.

3.2 La transformada de Laplace como herramienta útil

La transformada de Laplace $\bar{f}(s)$ de una función $f(t)$ se define como:

$$\mathcal{L}[f(t)] \equiv \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{C}$.

El uso de transformadas de Laplace ofrece un método simple y elegante de resolver ecuaciones diferenciales como las que se obtienen en los modelos matemáticos de los procesos alimentarios.

Entre las diferentes propiedades de las transformadas de Laplace cabe destacar:

1. Es un **operador lineal**:

$$\mathcal{L}[a_1f_1(t) + a_2f_2(t)] = a_1\mathcal{L}[f_1(t)] + a_2\mathcal{L}[f_2(t)]$$

2. La **transformada de una derivada** es:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s\bar{f}(s) - f(0)$$

Es importante resaltar que una ecuación diferencial ordinaria de primer orden pasa a ser una ecuación lineal de primer grado.

La transformada de la segunda derivada es:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2\bar{f}(s) - sf(0) - f'(0)$$

Generalizando:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{(n)}f(t)}{dt^n}\right] = s^n\bar{f}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Esta propiedad permite resolver de manera sencilla ecuaciones diferenciales ya que las convierte en ecuaciones algebraicas. El Problema 2.3 muestra cómo se puede utilizar la transformada de Laplace para resolver una ecuación diferencial.

3. La **transformada de Laplace de una integral** es:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}\bar{f}(s)$$

4. **Translación de la transformada**:

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = \bar{f}(\alpha + s)$$

Translación de la función:

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)U(t - t_0)] = e^{-t_0s}\bar{f}(s) \quad (3.6)$$

5. Teorema del valor final:

$$\mathcal{L} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} [s \bar{f}(s)] \quad (3.7)$$

i Ejemplo

La aplicación de la transformada de Laplace a una función es sencilla disponiendo de las tablas de transformadas de Laplace y del conocimiento de las propiedades anteriores. En el [Prob. 3.1](#) se muestra como se aplica.

3.3 La función de transferencia. Álgebra de funciones de transferencia

Para un proceso sencillo, como el del nivel del depósito, se puede plantear un esquema sencillo que describa en cierta medida al sistema:

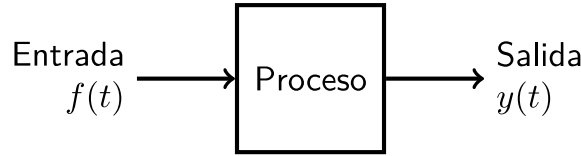


Figura 3.2: Representación simplificada de un proceso.

Para el ejemplo del nivel del depósito, $f(t) = Q_1(t)$ y $y(t) = H(t)$. Es decir, en este caso el depósito es el proceso, la salida es la variación del nivel del depósito y la entrada al proceso es el caudal de entrada.

En el caso de trabajar utilizando las transformadas de Laplace de las funciones de entrada y salida, se puede representar la dinámica del proceso mediante el uso de la *función de transferencia*. La función de transferencia $G(s)$ liga la entrada y la salida del sistema:

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[f(t)]} = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{f}(s)}$$

donde $\bar{y}(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta del proceso definida utilizando variables de desviación y $\bar{f}(s)$ es la transformada de la función de desviación de la entrada.

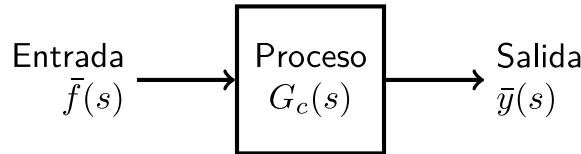


Figura 3.3: La función de transferencia del proceso es $G(s)$, $\bar{f}(s)$ y $\bar{y}(s)$ son la transformada de Laplace de las funciones de entrada y salida del proceso.

Para obtener la función de transferencia del ejemplo se realiza la transformada de Laplace de la ecuación diferencial Ecuación 3.5:

$$\mathcal{L} \left[A \frac{dH(t)}{dt} \right] = \mathcal{L} \left[Q_1(t) - \frac{H(t)}{R} \right]$$

Se realizan las transformadas considerando que el operador es lineal y conociendo la transformada de una derivada:

$$As\bar{H}(s) = \overline{Q_1}(s) - \frac{\bar{H}(s)}{R}$$

Se supone que para $t = 0$ el sistema está todavía en estado estacionario, las variables de desviación son nulas.

Operando la ecuación anterior para encontrar la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\bar{H}(s)}{\overline{Q_1}(s)} = \frac{R}{RA s + 1}$$

Este es la función de transferencia típica de un sistema de primer orden.

Para los procesos más complicados, con diagramas de bloques más complejos, se recurre al álgebra de funciones de transferencia.

En la situación en la que se presente un conjunto de procesos en paralelo, que se representan como una serie de bloques en paralelo, como los de la figura siguiente:

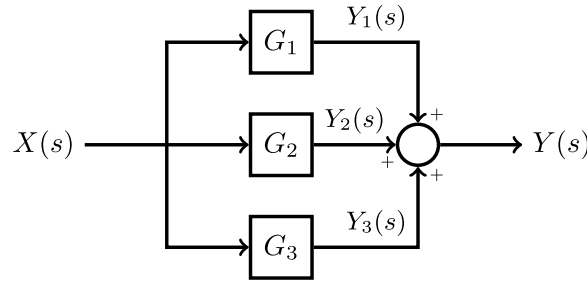


Figura 3.4: Reducción de tres bloques en paralelo.

Se puede encontrar un bloque equivalente que reúna las tres funciones de transferencia G_1 , G_2 y G_3 en una sola función de transferencia G :

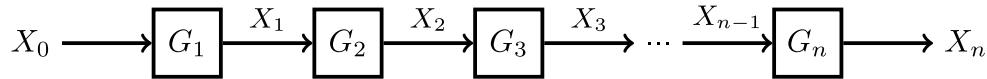


Figura 3.5: Reducción de un grupo de n bloques en serie.

Buscar un bloque equivalente tiene la ventaja de que solo será necesario trabajar con una función de transferencia en lugar de con tres, si no se necesita conocer las funciones X_1 , X_2 y X_3 .

En este caso obtener la función de transferencia equivalente es una tarea sencilla:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s)}{X(s)} = G_1(s) + G_2(s) + G_3(s)$$

Generalizando:

$$G(s) = \sum_i G_i(s)$$

Para un diagrama de bloques en serie:

$$G(s) = \frac{X_n}{X_0} = \frac{X_1}{X_0} \frac{X_2}{X_1} \dots \frac{X_n}{X_{n-1}} = G_1 G_2 \dots G_n$$

Generalizando:

$$G(s) = \prod_i G_i(s) \quad (3.8)$$

i Ejemplo

El [Problema 3.6](#) muestra un ejemplo de sistema en serie, se trata de dos depósitos de almacenamiento en serie. La curiosidad es que se plantea el sistema con interacción y el sistema de tanques sin interacción, para el que no es aplicable de manera directa la Ecuación [3.8](#).

3.4 Transformadas de algunas funciones singulares

A continuación se muestran las transformadas de algunas funciones con las que se trabajará frecuentemente más adelante ya que pueden ser asimiladas como las perturbaciones más frecuentes.

Si no se dice lo contrario todas estas funciones se definen para que su valor sea nulo a tiempo menor que cero.

3.4.1 Función escalón

Es una función cuyo valor para tiempos menores que cero es nulo y que alcanza el valor M para tiempo mayor que 0:

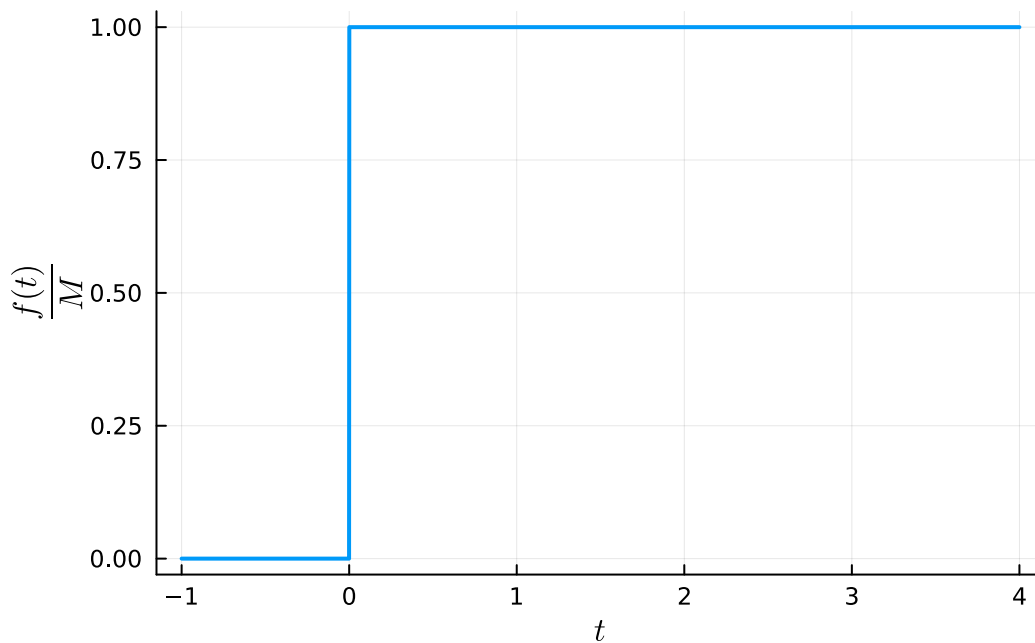


Figura 3.6: Función escalón de altura M .

Esta función se define como:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ M & t > 0 \end{cases}$$

La transformada de Laplace de esta función es:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{M}{s}$$

Si M es igual a 1 se habla de la función escalón unidad, $U(t)$, o de la función de Heaviside, $\theta(t)$.

Encontrar la transformada inversa de Laplace es muy sencillo utilizando *SymPy*:

Definición de las variables que vamos a utilizar

```
@syms M t s
```

Definimos un escalón unidad de altura M

```
f = M*Heaviside(t)
```

Calculamos la transformada inversa de Laplace

```
sympy.laplace_transform(f, t, s, noconds=True)
```

$$\frac{M}{s}$$

En el cálculo anterior, se ha utilizado la función de **Heaviside** como función escalón unidad. También se puede realizar el cálculo definiendo la función escalón como una constante M y asumiendo de manera implícita que ese valor es solo para $t > 0$:

Definimos un escalón unidad de altura M

```
f = M
```

Calculamos la transformada inversa de Laplace

```
sympy.laplace_transform(f, t, s, noconds=True)
```

$$\frac{M}{s}$$

Aunque la mayor parte de las veces las funciones de entrada sucede a tiempo 0, no es raro que aparezcan desplazadas en el tiempo, que sufran un retraso t_0 .

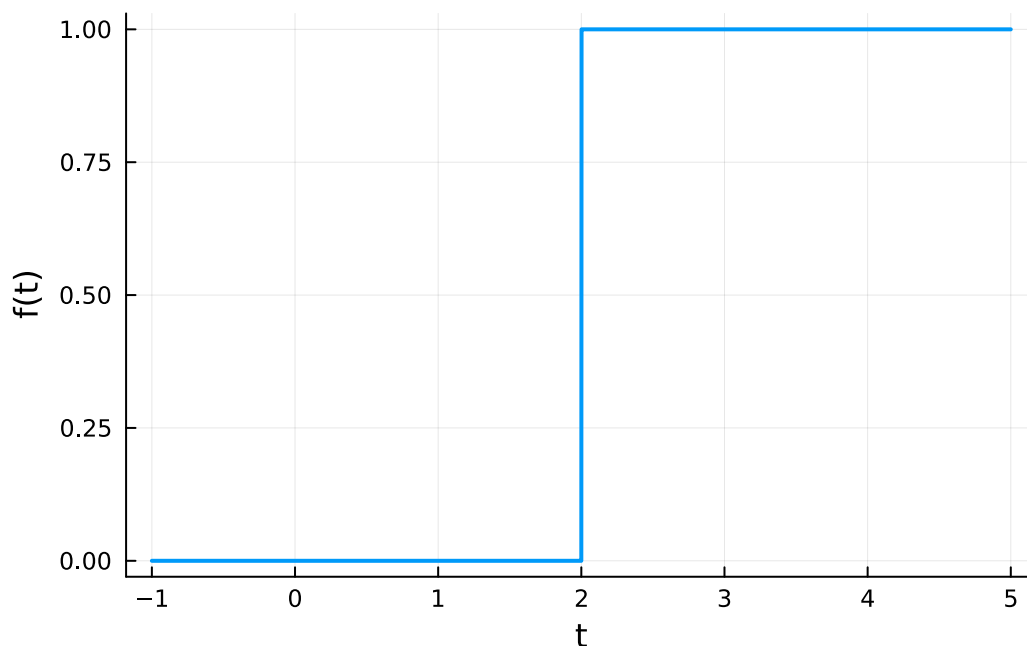


Figura 3.7: Función pulso unidad retrasada en el tiempo un valor t_0 .

En el caso de que la función tenga un retraso t_0 :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ M & t > t_0 \end{cases}$$

O lo que es lo mismo:

$$f(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ M & t > 0 \end{cases}$$

Por tanto, aplicando la propiedad de la transformada de Laplace, (ecuación {eq}traslacion), la transformada de Laplace será:

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = \frac{M}{s} e^{-st_0}$$

3.4.2 Función pulso

Se trata de una función pulso con área $A = Mt_0$. A continuación, en la figura de la derecha se muestra un pulso de altura unidad, $M = 1$. El pulso (línea roja) es la suma de un pulso unidad (línea verde) al que se le suma un pulso de altura -1 retrasado un tiempo igual a la anchura del pulso, es decir, t_0 :

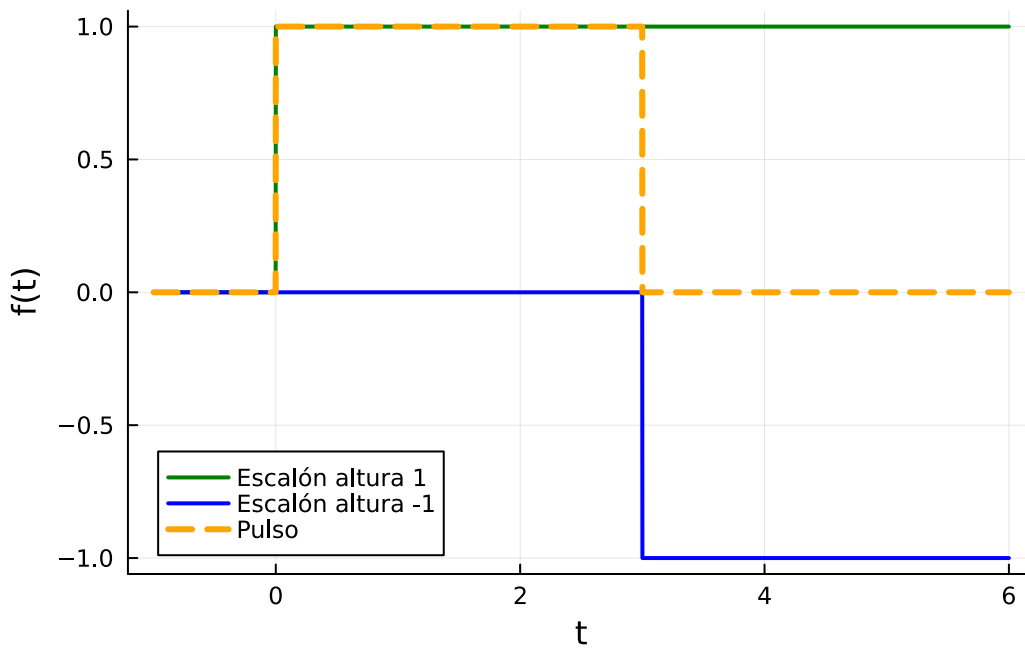


Figura 3.8: Un pulso, figura de la derecha, es la resta de dos funciones escalón de igual altura. El escalón negativo (azul) anula al escalón verde y forma el pulso (naranja).

La función pulso se define como:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ M & 0 < t < t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases}$$

Utilizando la definición del escalón unidad también se puede escribir como:

$$f(t) = M[U(t) - U(t - t_0)]$$

Por tanto, la transformada de Laplace será:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \bar{f}(s) = M \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-st_0}}{s} \right) = \frac{M}{s} (1 - e^{-st_0})$$

3.4.3 Función impulso

Se trata de un pulso de área A tal que $M \rightarrow \infty$ y $t_0 \rightarrow 0$:

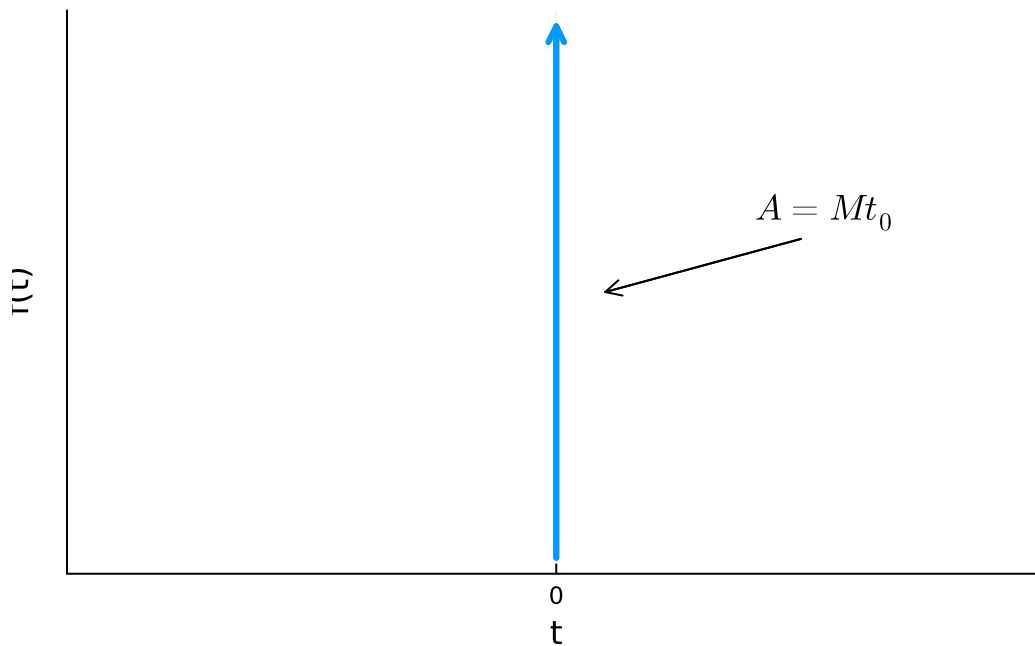


Figura 3.9: Función impulso de área A .

La transformada de Laplace de esta función es:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \bar{f}(s) = A$$

En el caso particular de que el área sea 1 se habla de la función delta de Dirac $\delta(t)$.

A continuación se calcula la transformada de Laplace de un impulso de altura A , $f(t) = A\delta(t)$:

`@syms A`

```
sympy.laplace_transform(A*sympy.DiracDelta(t), t, s, noconds=True)
```

A

Se puede comprobar fácilmente que el impulso es la derivada de la función escalón.

i Ejemplo

En el [Problema 3.4](#) se puede comprobar las diferencias y similitudes en la respuesta de un proceso a una entrada en escalón y en impulso.

3.4.4 Función rampa

Se trata de una función lineal de pendiente M :

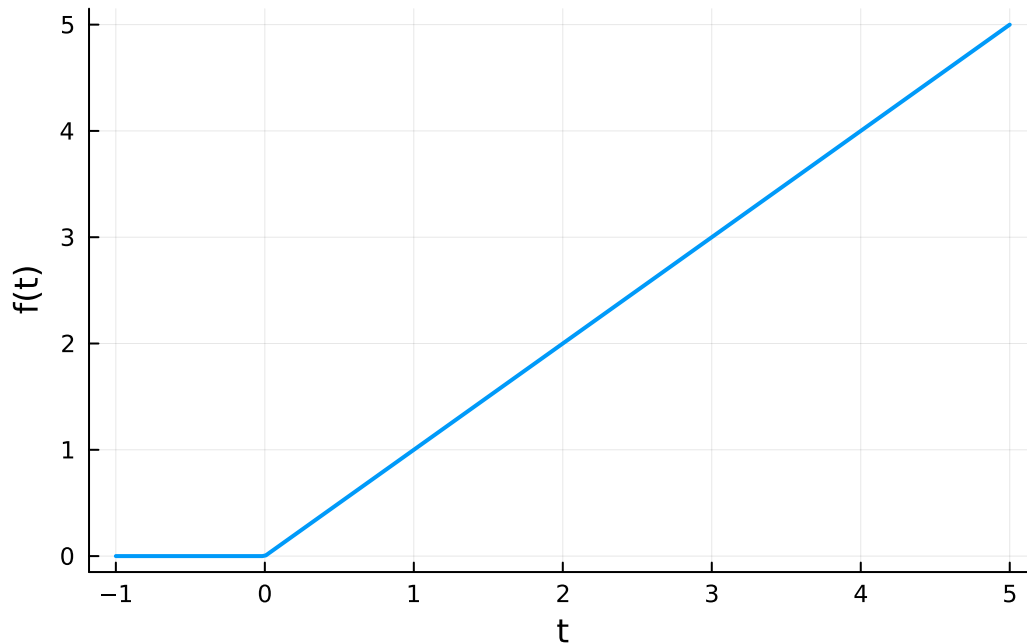


Figura 3.10: Función rampa de pendiente M .

Esta función se define como:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Mt & t > 0 \end{cases} = MtU(t)$$

La transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}[MtU(t)] = \frac{M}{s^2}$$

`sympy.laplace_transform(M*t, t, s, noconds=True)`

$$\frac{M}{s^2}$$

3.4.5 Funciones trigonométricas

La función seno es:

Se define la función como:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ M \sin(\omega t) & t > 0 \end{cases} = MU(t) \sin(\omega t)$$

donde M es la amplitud y ω es la frecuencia angular, expresada normalmente como rad/s.

La transformada de Laplace de la función seno es:

$$\mathcal{L}[M \sin(\omega t)] = \frac{M\omega}{s^2 + \omega^2}$$

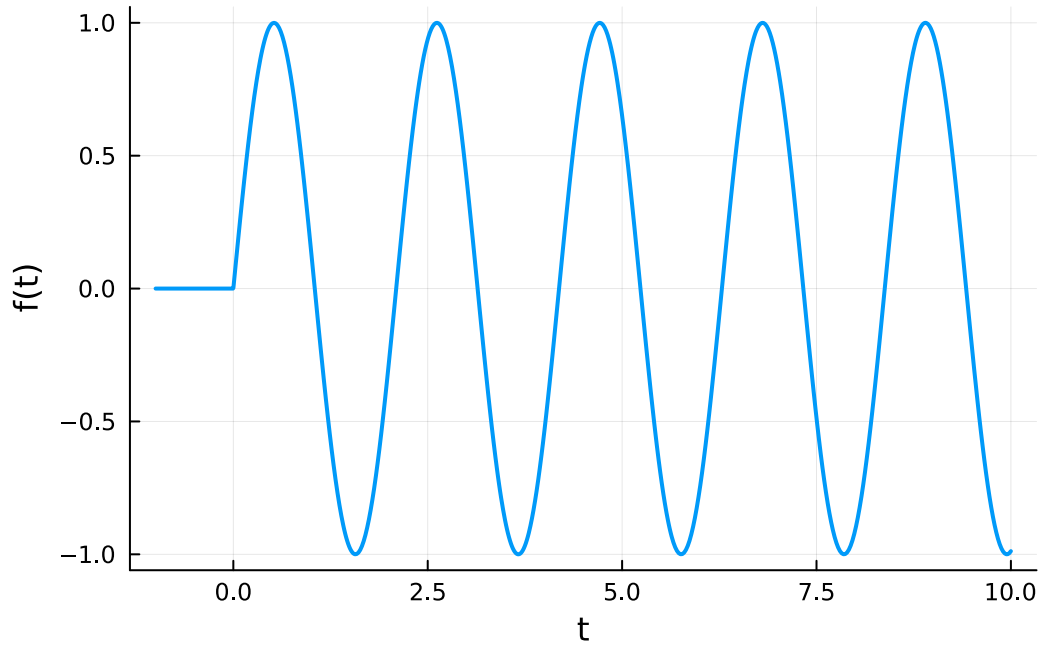


Figura 3.11: Función seno de frecuencia ω .

y la de la función coseno:

$$\mathcal{L}[M \cos(\omega t)] = \frac{Ms}{s^2 + \omega^2}$$

```
@syms w=>"omega"
sympy.laplace_transform(M*sin(w*t), t, s, noconds=True)
```

$$\frac{M\omega}{\omega^2 + s^2}$$

3.5 Inversión de transformadas. De vuelta al tiempo real

Continuando con el ejemplo se estudiará la salida del sistema para una entrada de tipo escalón unidad:

$$\bar{H}(s) = \left(\frac{R}{RA s + 1} \right) \bar{Q}_1(s) = \left(\frac{R}{RA s + 1} \right) \frac{1}{s}$$

Mediante el operador transformada inversa de Laplace ($\mathcal{L}^{-1}$) se obtiene la salida en tiempo real. Para ello hay que descomponer la función a invertir en partes asimilables a las que se encuentran en las tablas de transformadas de Laplace (Sección 3.7):

$$\bar{H}(s) = \left(\frac{R}{RA s + 1} \right) \frac{1}{s} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s + \frac{1}{AR}}$$

Donde a y b son dos variables a determinar. Obviamente, $a = R$ y $b = -R$. Por tanto,

$$H(t) = \left(R - R e^{-\frac{t}{RA}} \right) U(t) = RU(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{RA}} \right) = RU(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

donde $\tau = RA$ es la constante de tiempo y tiene dimensiones de tiempo.

También se puede realizar la transformada inversa de Laplace de una manera muy simple utilizando *SymPy*:

```
using SymPy, Plots, LaTeXStrings

# Definición de los símbolos necesarios
@syms R::real A::real t::real
@syms s

# Definición de la función de transferencia, G(s)
G = R/(R*A*s+1)

# Definición de la función de entrada, f(s),
# en este caso un escalón unidad
f = 1/s
```

```
# Cálculo de la respuesta, H(t)
sympy.inverse_laplace_transform(G*f, s, t)
```

$$R \left(\theta(t) - e^{-\frac{t}{AR}} \theta(t) \right)$$

Cuanto mayor es τ más lenta es la respuesta, más tarda el sistema en alcanzar el estado estacionario. Se comprueba que cuanto menor es la sección del tanque más rápida es la respuesta. Si τ es grande se dice que el sistema presenta una gran inercia.

```
Taus = [1//2, 1, 2, 4, 8 ]
f = 1/s
Yt = []
fig_inv = plot(lw=2,
    xlabel=L"t", ylabel=L"y(t)", legend=:bottomright)

for i in Taus
    G = 1/( *s+1)
    y = G*f
    yt = sympy.inverse_laplace_transform(y, s, t)
    push!(Yt, yt)
end

for i in 1:5
    tau = float(Taus[i])
    plot!(Yt[i], -0.5, 10, lw=2, label=L"\tau_{$i} = {$tau}")
end

display(fig_inv)
```

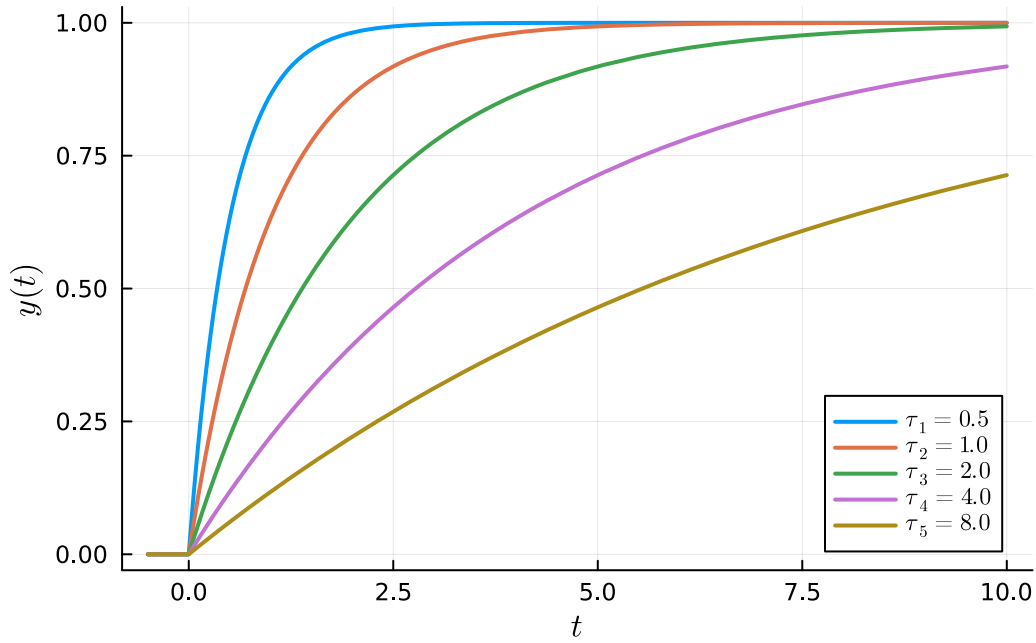


Figura 3.12: Influencia en la respuesta de la constante de tiempo.

i Ejemplo

La técnica propuesta en este capítulo para obtener modelos matemáticos se puede utilizar para modelos de mayor complejidad, como el que se obtiene en la resolución del [Problema 3.7](#).

3.6 Expansión en fracciones parciales

⚠ Advertencia

En Man (2009) hay un método más sencillo que no requiere realizar derivadas.

Un método de inversión de transformadas de Laplace es la expansión en fracciones parciales. Para invertir la función $\bar{f}(s)$ se reordena como una suma de funciones simples:

$$\bar{f}(s) = \bar{f}_1(s) + \bar{f}_2(s) + \dots + \bar{f}_s(s)$$

Una vez realizada la descomposición se realiza la inversión de transformadas:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}_2(s)] + \dots + \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}_s(s)]$$

Normalmente las funciones a invertir en control de procesos aparecen como fracciones de polinomios en s del tipo:

$$\bar{f}(s) = \frac{\bar{z}(s)}{\bar{p}(s)}$$

donde $z(s)$ es un polinomio de orden m y $p(s)$ es un polinomio de orden n .

Para realizar la inversión de la transformada de Laplace se factoriza el denominador:

$$\bar{f}(s) = \frac{z(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

donde p_i son las raíces (ceros) del polinomio $p(s)$.

Si todos los p_i son diferentes, se puede expresar $f(s)$ como una suma de n términos:

$$\bar{f}(s) = \frac{A}{s-p_1} + \frac{B}{s-p_2} + \frac{C}{s-p_3} + \dots + \frac{W}{s-p_n}$$

Los numeradores de la ecuación anterior se evalúan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow p_1} [(s-p_1)\bar{f}(s)] \\ B &= \lim_{s \rightarrow p_2} [(s-p_2)\bar{f}(s)] \\ &\vdots \\ W &= \lim_{s \rightarrow p_n} [(s-p_n)\bar{f}(s)] \end{aligned}$$

Si existen raíces del denominador de $f(s)$ repetidas, de nuevo se expresa $f(s)$ como un producto de fracciones simples. Por ejemplo, en el caso de que una raíz se repita dos veces:

$$\bar{f}(s) = \frac{z(s)}{(s-p_1)^2(s-p_3)(s-p_4)\dots(s-p_n)}$$

la descomposición en fracciones simples es:

$$\bar{f}(s) = \frac{A}{(s-p_1)^2} + \frac{B}{s-p_1} + \frac{C}{s-p_3} + \dots + \frac{W}{s-p_n} \quad (3.9)$$

Si la raíz se repite 3 veces (orden 3) la expansión sería así:

$$\begin{aligned} \bar{f}(s) &= \frac{z(s)}{(s-p_1)^3(s-p_4)(s-p_5)\dots(s-p_n)} \\ \bar{f}(s) &= \frac{A}{(s-p_1)^3} + \frac{B}{(s-p_1)^2} + \frac{C}{s-p_1} + \frac{D}{s-p_4} + \dots + \frac{W}{s-p_n} \end{aligned}$$

Los numeradores de la Ecuación 3.9 se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow p_1} [(s-p_1)^2 \bar{f}(s)] \\ B &= \lim_{s \rightarrow p_1} \left\{ \frac{d}{ds} [(s-p_1)^2 \bar{f}(s)] \right\} \\ C &= \lim_{s \rightarrow p_1} [(s-p_1) \bar{f}(s)] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Para encontrar el numerador C de la Ecuación 3.10 se debe tomar la segunda derivada. Generalizando al término A_j de una raíz de orden N en p_1 :

$$A_j = \lim_{s \rightarrow p_1} \left\{ \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} [(s-p_1)^N \bar{f}(s)] \right\} \frac{1}{(m-1)!}$$

Aunque su utilización es un tanto tediosa existen casos, como el apartado d) del [problema 3.2](#), que muy difícilmente se puede resolver sin utilizar la técnica de expansión en fracciones parciales. Esta técnica tiene la ventaja de ser muy sistemática.

La expansión en fracciones simples también se puede realizar con SymPy utilizando la instrucción `apart`:

```
using SymPy
@syms s t
apart(3*s+3/(2*s^2+s+1))
```

$$3s + \frac{3}{2s^2+s+1}$$

3.7 Transformadas de Laplace

Tabla 3.1: Transformadas de Laplace de funciones seleccionadas.

$f(t), t > 0$	$\bar{f}(s)$
Impulso unidad, $\delta(t_0)$	1
Pulso unidad, $\delta_A(t)$	$\frac{1}{A} \frac{1-e^{-sA}}{s}$
Escalón unidad	$\frac{1}{s}$
Rampa, $f(t) = t$	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2!}{s^3}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Tabla 3.2: Transformada inversa de Laplace de funciones seleccionadas.

$f(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
$\frac{s+a}{(s+b)(s+c)}$	$\frac{1}{c-b} [(a-b)e^{-bt} - (a-c)e^{-ct}]$
$\frac{a}{(s+b)^2}$	ate^{-bt}
$\frac{a}{(s+b)^3}$	$\frac{a}{2} t^2 e^{-bt}$
$\frac{a}{(s+b)^{n+1}}$	$\frac{a}{n!} t^n e^{-bt}$
$\frac{1}{s(as+1)}$	$1 - e^{-t/a}$
$\frac{1}{s(as+1)^2}$	$1 - \frac{a+t}{a} e^{-t/a}$
$\frac{\omega^2}{s(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)}$	$1 + \frac{e^{-\zeta\omega t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t - \varphi)$ donde $\cos \varphi = -\zeta$
$\frac{s}{(1+as)(s^2+\omega^2)}$	$-\frac{1}{1+a^2\omega^2} e^{-t/a} + \frac{1}{\sqrt{1+a^2\omega^2}} \cos(\omega t + \varphi)$ donde $\varphi = \arctan(a\omega)$
$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} \sin(\omega t)$
$\frac{1}{(s+a)[(s+b)^2+\omega^2]}$	$\frac{e^{-at}}{(a-b)^2+\omega^2} + \frac{e^{-bt} \sin(\omega t + \varphi)}{\omega\sqrt{(a-b)^2+\omega^2}}$ donde $\varphi = \arctan(\frac{\omega}{a-b})$

3.8 Problemas

Problema 3.1

Hallar la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

- a. $f(t) = e^{-2t} \cos(t)$
- b. $f(t) = e^{-4t} + \theta(t-2) \sin(t-2) + t^2 e^{-2t}$
- c. $f(t) = 2e^{-t} \cos(10t) - t^4 + 6e^{-(t-10)} \theta(t-10)$

Solución

a) Aplicando la propiedad 4. *Traslación de la transformada*:

$$\mathcal{L}(e^{-2t} \cos t) = \frac{s+2}{s^2+4s+5}$$

También se puede realizar la transformada de Laplace utilizando *SymPy*. En primer lugar cargamos la librería:

```
using SymPy
```

A continuación definimos las variables s y t . Las definimos por separado para indicar que t es una variable real, mientras que s es una variable compleja:

```
@syms s
@syms t::real
```

```
(t,)
```

Finalmente calculamos la transformada de Laplace:

```
sympy.laplace_transform(exp(-2*t)*cos(t), t, s)
```

```
((s + 2)/((s + 2)^2 + 1), -2, True)
```

SymPy ofrece más información de la que necesitamos, ya que solo necesitamos la función transformada. Podemos obtenerla añadiendo el parámetro `noconds`:

```
sympy.laplace_transform(exp(-2*t)*cos(t), t, s, noconds=True)
```

$$\frac{s+2}{(s+2)^2+1}$$

Puede ser conveniente definir una función para simplificar la realización de la transformada de Laplace, ya que siempre vamos a utilizar las variables s y t :

```
L(f) = sympy.laplace_transform(f, t, s, noconds=True)
```

```
L(exp(-2*t)*cos(t))
```

$$\frac{s+2}{(s+2)^2+1}$$

b) El operador transformada de Laplace es lineal:

$$\mathcal{L}(e^{-4t} + \sin(t-2) + t^2 e^{-2t}) = \mathcal{L}(e^{-4t}) + \mathcal{L}(\sin(t-2)) + \mathcal{L}(t^2 e^{-2t})$$

La transformada de Laplace del primer sumando es directa a partir de las tablas:

$$\mathcal{L}[e^{-4t}] = \frac{1}{s+4}$$

Para calcular el segundo de los sumandos es necesario aplicar, de nuevo, la propiedad 4.:

$$\mathcal{L}[\sin(t-2)] = e^{-2s} \mathcal{L}[\sin(t)] = e^{-2s} \frac{1}{s^2+1}$$

Por último, el tercer sumando se obtiene de la consulta de las tablas:

$$\mathcal{L}[t^2 e^{-2t}] = \frac{2!}{(s+2)^{2+1}} = \frac{2}{(s+2)^3}$$

Por tanto,

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s+4} + e^{-2s} \frac{1}{s^2+1} + \frac{2}{(s+2)^3}$$

Con SymPy obtenemos el mismo resultado:

```
L(exp(-4*t) + sin(t-2)*Heaviside(t-2) + t^2*exp(-2*t))
```

$$\frac{e^{-2s}}{s^2+1} + \frac{1}{s+4} + \frac{2}{(s+2)^3}$$

c) De nuevo, aplicando la linealidad del operador transformada:

$$\mathcal{L}[2e^{-t} \cos(10t)] = 2 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 10^2}$$

$$\mathcal{L}[t^4] = \frac{4!}{s^5} = \frac{24}{s^5}$$

$$\mathcal{L}[6e^{-(t-10)}] = 6e^{-10s} \frac{1}{s+1}$$

Por tanto,

$$\bar{f}(s) = 2 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 10^2} - \frac{24}{s^5} + 6e^{-10s} \frac{1}{s+1}$$

Utilizando SymPy:

```
L(2*exp(-t)*cos(10*t)) - L(t^4) + L(6*exp(t-10)*Heaviside(t-10))
```

$$\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+100} + \frac{6e^{-10s}}{s-1} - \frac{24}{s^5}$$

Problema 3.2

Hallar la transformada inversa de:

a. $f(s) = \frac{1}{\frac{s}{3}+1}$

b. $f(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+1)}$

c. $f(s) = \frac{3s+4}{s^3(s+2)}$

d. $f(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}$

💡 Solución

- a) Para realizar la transformada inversa de Laplace se puede consultar las tablas, donde se encuentra que:

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s+a}$$

Por tanto, para resolver el ejercicio se operará de la siguiente manera:

$$f(s) = \frac{1}{\frac{s}{3} + 1} = \frac{3}{s+3}$$

Por tanto, realizando la transformada inversa de Laplace y considerando que el operador es asociativo:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s+3}\right) = 3e^{-3t}$$

También se puede resolver el problema utilizando *SymPy*, como siempre empezaremos cargando la librería y definiendo las variables t y s :

```
using SymPy
@syms s
@syms t::real;
```

La función para realizar la transformada inversa de Laplace es `inverse_laplace_transform` y la sintaxis es sencilla y similar a `laplace_transform`:

```
sympy.inverse_laplace_transform(1/(s/3 + 1), s, t)
```

$$3e^{-3t}\theta(t)$$

Al igual que en el [problema 3.01](#) definimos una función `L()` para que hacer que fuera más sencillo el calcular la transformada de Laplace, podemos hacer lo mismo para la transformada inversa de Laplace. Definimos una nueva función llamada `invL`, su funcionamiento es trivial:

```
invL(f) = sympy.inverse_laplace_transform(f, s, t)
```

```
invL(1/(s/3 + 1))
```

$$3e^{-3t}\theta(t)$$

- b) Para poder realizar la transformada inversa de Laplace es necesario realizar la descomposición de la función en fracciones simples:

$$f(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B(s+1)}{s^2+1}$$

Realizando la suma y simplificando el denominador se obtiene:

$$s = A(s^2+1) + B(s^2+2s+1)$$

Para encontrar A y B hay que resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = 2B \end{cases}$$

Por tanto, $A = -\frac{1}{2}$ y $B = \frac{1}{2}$. Como consecuencia, aplicando la propiedad asociativa:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{(s+1)(s^2+1)} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}(s+1)}{s^2+1} \right) = \\ \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{s+1} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\frac{1}{2}(s+1)}{s^2+1} \right)$$

La transformada inversa de Laplace del primer sumando es directa:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{s+1} \right) = -\frac{1}{2}e^{-t}$$

La transformada inversa de Laplace del segundo sumando requiere descomponer la fracción para encontrar funciones como las que aparecen en las tablas:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\frac{1}{2}(s+1)}{s^2+1} \right) = \frac{1}{2} \left[\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2+1} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2+1} \right) \right] = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$$

El resultado del problema es:

$$f(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$$

Utilizando SymPy podemos realizar la descomposición en fracciones simples:

```
f = s/((s+1)*(s^2+1))
apart(f)
```

$$\frac{s+1}{2(s^2+1)} - \frac{1}{2(s+1)}$$

También podemos realizar la transformada inversa de Laplace:

```
invL(f)
```

$$\left(\frac{\sin(t)}{2} + \frac{\cos(t)}{2} \right) \theta(t) - \frac{e^{-t}\theta(t)}{2}$$

- c) Para realizar la transformada inversa de Laplace es necesario descomponer $f(s)$ en fracciones simples:

$$f(s) = \frac{3s+4}{s^3(s+2)} = \frac{As^2+Bs+C}{s^3} + \frac{D}{s+2}$$

Tras realizar la suma y simplificar el denominador de la ecuación se obtiene:

$$3s+4 = As^3 + s^2(2A+B) + s(2B+C) + 2C + Ds^3$$

Para encontrar A , B , C y D hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = A + D \\ 0 = 2A + B \\ 3 = 2B + C \\ 4 = 2C \end{cases}$$

La solución es $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 2$ y $D = \frac{1}{4}$. Por tanto,

$$f(s) = -\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{\frac{1}{4}}{s+2}$$

La realización de la transformada inversa de Laplace es trivial:

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + t^2 + \frac{1}{4}e^{-2t}$$

Podemos comprobar los resultados con SymPy. En primer lugar, realizaremos la descomposición de fracciones simples:

```
apart((3*s+4)/(s^3*(s+2)))
```

$$\frac{1}{4(s+2)} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{2}{s^3}$$

La transformada inversa de Laplace:

```
invL((3*s+4)/(s^3*(s+2)))
```

$$\frac{t\theta(t)}{2} + \frac{((4t^2-2t+1)e^{2t}-1)e^{-2t}\theta(t)}{4} - \frac{\theta(t)}{4} + \frac{e^{-2t}\theta(t)}{4}$$

- d) De nuevo, antes de realizar la transformada inversa de Laplace hay que realizar la descomposición en fracciones simples. Para realizarla se seguirá en este caso el método que aparece en el Tema 2. Se buscan las raíces del denominador de $f(s)$, estas raíces son dobles y son i y $-i$. Por tanto la descomposición en raíces simples, teniendo en cuenta que las raíces son dobles, es:

$$f(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2}{(s-i)^2(s+i)^2} = \frac{A}{(s-i)^2} + \frac{B}{s-i} + \frac{C}{(s+i)^2} + \frac{D}{s+i}$$

Según el método, para encontrar A :

$$A = \lim_{s \rightarrow i} \left[(s-i)^2 \frac{s^2}{(s-i)^2(s+i)^2} \right] = \frac{1}{4}$$

Para B , C y D :

$$B = \lim_{s \rightarrow i} \left\{ \frac{d}{ds} \left[(s-i)^2 \frac{s^2}{(s-i)^2(s+i)^2} \right] \right\} = \lim_{s \rightarrow i} \left[\frac{2s(s+i)^2 - s^2 2(s+i)}{(s+i)^4} \right] = \frac{2i(-4) - (-1)2(2i)}{16} = \frac{-8i + 4i}{16} = -\frac{i}{4} \quad (3.10)$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -i} \left[(s+i)^2 \frac{s^2}{(s-i)^2(s+i)^2} \right] = \frac{1}{4}$$

$$D = \lim_{s \rightarrow -i} \left\{ \frac{d}{ds} \left[(s+i)^2 \frac{s^2}{(s-i)^2(s+i)^2} \right] \right\} = \lim_{s \rightarrow -i} \left[\frac{2s(s-i)^2 - s^2 2(s-i)}{(s-i)^4} \right] = \frac{2(-i)(-4) - (-1)2(-2i)}{16} = \frac{i}{4} \quad (3.11)$$

Por tanto, la descomposición en fracciones simples queda de la manera siguiente:

$$\frac{s^2}{(s-i)^2(s+i)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{(s-i)^2} - \frac{\frac{i}{4}}{s-i} + \frac{\frac{1}{4}}{(s+i)^2} + \frac{\frac{i}{4}}{s+i}$$

La realización de la transformada inversa de Laplace es directa:

$$F(t) = \frac{1}{4}te^{it} - \frac{i}{4}e^{it} + \frac{1}{4}te^{-it} + \frac{i}{4}e^{-it}$$

Para obtener una respuesta en tiempo real util es necesario eliminar los números complejos de la función. Para ello, hay que considerar la escritura exponencial de un número complejo:

$$\alpha = \beta + i\gamma \implies e^{\alpha t} = e^{\beta t}(\cos \gamma t + i \sin \gamma t)$$

De manera que:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$e^{-it} = \cos(-t) + i \sin(-t) = \cos t - i \sin t$$

Sustituyendo en $F(t)$:

$$F(t) = \frac{1}{4}t(\cos t + i \sin t) - \frac{i}{4}(\cos t + i \sin t) + \frac{1}{4}t(\cos t - i \sin t) + \frac{i}{4}(\cos t - i \sin t)$$

Operando:

$$F(t) = \frac{1}{2}t \cos t + \frac{1}{2} \sin t$$

También se puede resolver el problema utilizando SymPy.

Podemos realizar la descomposición en factores simples:

$$f = s^2 / (s^2 + 1)^2$$

`apart(f)`

$$\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

La transformada inversa de Laplace:

`invL(f)`

$$\frac{(t \cos(t) + \sin(t))\theta(t)}{2} + \sin(t)\theta(t)$$

Problema 3.3

Usando la técnica de la transformada de Laplace, encontrar las respuestas transitoria y estacionaria del sistema descrito por la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1$$

con las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 1$.

Solución

La transformada de una derivada de una función y de la derivada segunda es:

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = sf(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right) = -\frac{d}{dt}f(t)\Big|_{t=0} + s^2f(s) - f(0)s$$

Realizando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial a resolver y considerando las condiciones iniciales se obtiene:

$$s^2\bar{y} - s - 1 + 3(s\bar{y} - 1) + 2\bar{y} = \frac{1}{s}$$

Despejando $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{s^2 + 4s + 1}{s(s+1)(s+2)}$$

Para poder realizar la transformada inversa de Laplace y poder obtener $y(t)$ hay que realizar primero la descomposición en fracciones simples de $\bar{y}(s)$:

$$\frac{s^2 + 4s + 1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

Sumando las fracciones simples y simplificando el denominador se obtiene la siguiente ecuación:

$$s^2 + 4s + 1 = A(s+1)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s+1)$$

Operando se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} (1)s^2 = (A+B+C)s^2 \\ (4)s = (3A+3B+C)s \\ 1 = 2A \end{cases}$$

La solución de este sistema es $A = \frac{1}{2}$, $B = 2$ y $C = -\frac{3}{2}$. Por tanto,

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{\frac{3}{2}}{s+2}$$

Realizando la transformada inversa de Laplace, consultando las tablas, se obtiene:

$$y(t) = \frac{1}{2}U(t) + 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$$

donde $U(t)$ es el escalón unidad.

La parte estacionaria de $y(t)$ es $\frac{1}{2}U(t)$ ya que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{1}{2}$$

El resto de la solución es la respuesta transitoria, es decir, la parte de la solución dependiente del tiempo.

Resolución con SymPy

En primer lugar, cargaremos la librería y definiremos las variables s y t . Como es habitual, especificaremos que el tiempo es una variable real. Además, definiremos y como una función, ya que $y(t)$ será nuestra función incógnita:

`using SymPy`

`@syms t::real s y()::real`

`D = Differential(t);`

El siguiente paso es definir las condiciones iniciales, $y(0) = 1$ y $\frac{dy(0)}{dt} = 1$. Observad la sintaxis:

```
ic = Dict(y(0)=>1, D(y)(0)=>1);
```

Para reducir errores es conveniente definir la ecuación diferencial y la llamaremos **deq**. Para definir una ecuación en *SymPy* se utiliza la función **Eq(lhs, rhs)** donde **lhs** indica la parte izquierda de la igualdad y **rhs** la parte derecha:

```
deq = Eq(diff(y(t), t, 2) + 3diff(y(t),t) + 2y(t), 1)
```

$$2y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + \frac{d^2}{dt^2}y(t) = 1$$

Ya estamos en condiciones de resolver la ecuación diferencial mediante la instrucción **dsolve()**, que utiliza internamente la transformada inversa de Laplace. La solución de la ecuación la guardamos en la variable **sol**:

```
sol = dsolve(deq, y(t), ics=ic)
```

$$y(t) = \frac{1}{2} + 2e^{-t} - \frac{3e^{-2t}}{2}$$

El resultado es una igualdad, en el caso de que nos interese la parte derecha:

```
sol.rhs
```

$$\frac{1}{2} + 2e^{-t} - \frac{3e^{-2t}}{2}$$

Si es la parte izquierda:

```
sol.lhs
```

$$y(t)$$

Para encontrar la **respuesta estacionaria** hay que calcular el límite cuando el tiempo tiende a infinito, ya que entonces habrá desaparecido la influencia de la respuesta transitoria:

```
sympy.limit(sol.rhs, t, oo)
```

$$\frac{1}{2}$$

Problema 3.4

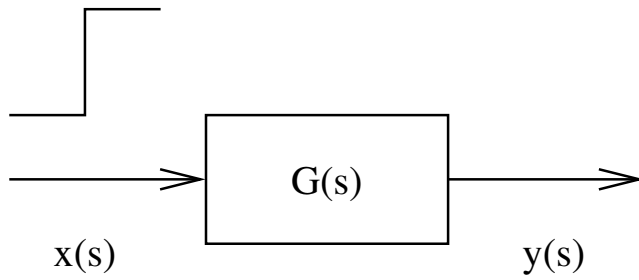
La respuesta a un escalón unidad de un sistema viene dada por:

$$y(t) = 1 - \frac{7}{3}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$$

- ¿Cuál es la función de transferencia de dicho sistema?
- ¿Cuál sería la respuesta en tiempo real si la entrada fuera un impulso unidad?

Solución

- Debemos encontrar aquella función de transferencia $G(s)$ que para una entrada de tipo escalón unidad ($x(s) = \frac{1}{s}$) produzca una respuesta como la del enunciado del problema. La transformada de Laplace de $y(t)$ es $y(s)$:



Por tanto la función de transferencia buscada será:

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)}$$

Para poder encontrar la función de transferencia hay que hacer la transformada de Laplace a la función $y(t)$:

$$y(s) = \mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{s} - \frac{\frac{7}{3}}{s+1} + \frac{\frac{3}{2}}{s+2} - \frac{\frac{1}{6}}{s+4} = \frac{s+8}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

Por tanto,

$$G(s) = \frac{s+8}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

- b) La función impulso es la derivada de la función escalón. En consecuencia, la respuesta en tiempo real a una entrada en impulso no será más que derivar $y(t)$ respecto al tiempo:

$$[y(t)]_{\text{impulso}} = \frac{d}{dt}[y(t)]_{\text{escalón}} = \frac{7}{3}e^{-t} - 3e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-4t}$$

Problema 3.5

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

- $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 3$ con $y(0) = y'(0) = 1$
- $\frac{dy}{dt} + 2y = 5 \sin(3t)$ con $y(0) = 1$

💡 Solución

- a) Para resolver la ecuación diferencial, en primer lugar se realizará la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2} + 4y\right] &= \mathcal{L}[3] \\ s^2\bar{y} - s - 1 + 4\bar{y} &= \frac{3}{s} \end{aligned}$$

A continuación se despeja $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4} + \frac{3}{s(s^2+4)}$$

Para obtener la respuesta en tiempo real hay que realizar la transformada inversa. La transformada inversa de los dos primeros sumandos es directa a partir de la tabla de transformadas de

Laplace. La transformada inversa del tercer de los sumandos no es directa, por lo que es necesario descomponerlo en fracciones simples:

$$\frac{3}{s(s^2 + 4)} = \frac{As}{s^2 + 4} + \frac{B}{s} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} \right)$$

donde:

$$\begin{aligned} 3 &= As^2 + B(s^2 + 4) \\ \begin{cases} 0 &= A + B \\ 3 &= 4B \end{cases} \end{aligned}$$

La realización de las transformadas de Laplace es ahora directa. La solución a la ecuación diferencial es:

$$y(t) = \cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{3}{4}(1 - \cos(2t))$$

También se puede resolver la ecuación utilizando *SymPy*. A continuación se muestra la serie de instrucciones necesarias para introducir las condiciones iniciales y la ecuación:

```
using SymPy
```

```
@syms s t::real y()
```

```
D = Differential(t)
```

```
# Condiciones iniciales
```

```
ic = Dict(D(y)(0)=>1, y(0)=>1)
```

```
# Ecuación diferencial
```

```
deq = D(D(y))(t) + 4*y(t) ~ 3
```

```
# Resolución de la ecuación diferencial
```

```
dsolve(deq, y(t), ics=ic)
```

$$y(t) = \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\cos(2t)}{4} + \frac{3}{4}$$

- b) La resolución de la ecuación se puede realizar aplicando la transformada de Laplace o directamente utilizando *SymPy*:

```
# Condiciones iniciales
```

```
ic2 = Dict(y(0)=>1);
```

```
# Ecuación diferencial
```

```
deq2 = D(y(t)) + 2*y(t) ~ 5sin(3t)
```

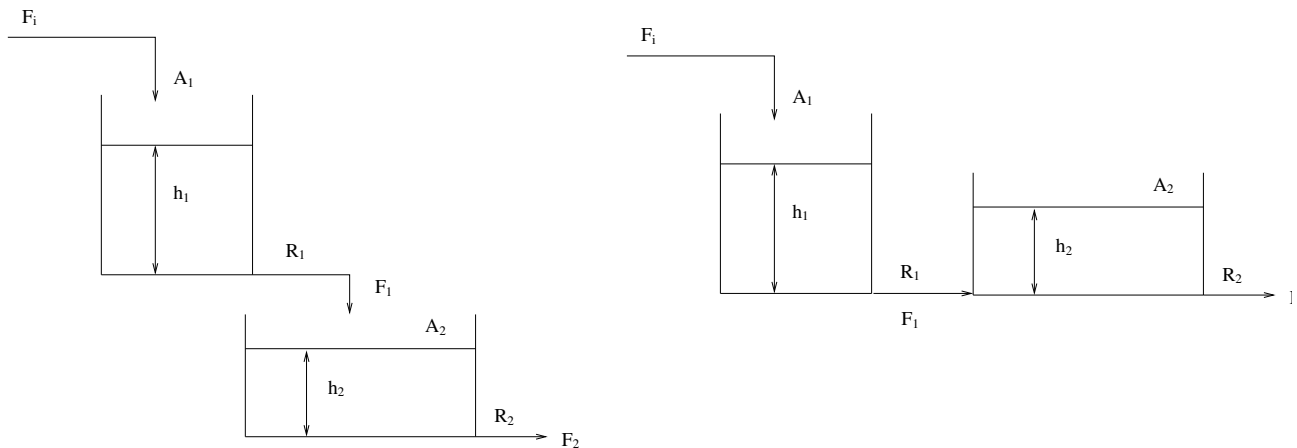
$$2y(t) + \frac{d}{dt}y(t) = 5 \sin(3t)$$

```
dsolve(deq2, y(t), ics=ic2)
```

$$y(t) = \frac{10 \sin(3t)}{13} - \frac{15 \cos(3t)}{13} + \frac{28e^{-2t}}{13}$$

Problema 3.6

Determinar las funciones de transferencia $\frac{h_2(s)}{F_i(s)}$ de los sistemas siguientes:



El fluido tiene una densidad constante y las resistencias son lineales ($F = \frac{h}{R}$).

💡 Solución

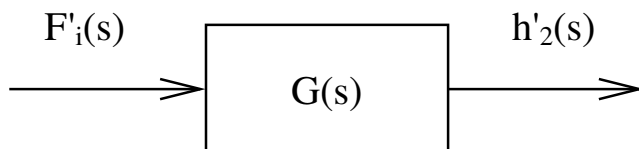
La primera figura muestra un sistema de *tanques sin interacción* ya que el nivel del segundo tanque no influye en el nivel del primer tanque o en el caudal F_1 . En cambio, el segundo sistema se trata de un sistema de *tanques con interacción* ya que el caudal de salida del primer tanque dependerá tanto del nivel del tanque 1 como del nivel del tanque 2.

Tanques sin interacción

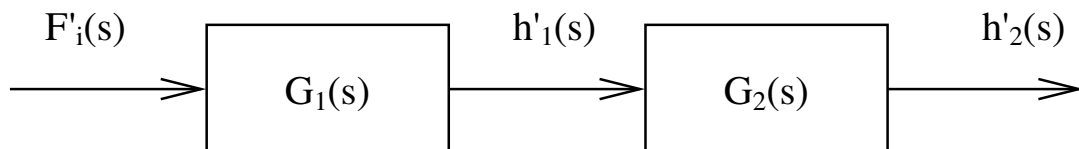
En ambos casos el objetivo del problema es encontrar la siguiente función de transferencia (las primas indican que se tratan de variables de desviación):

$$G(s) = \frac{h'_2(s)}{F'_i(s)}$$

representada en el siguiente diagrama:



Si el sistema no presenta interacciones el bloque anterior es equivalente a un sistema en el que hay dos procesos en serie como el que se muestra a continuación:



en el que cada uno de los bloques representa a un depósito. Las funciones de transferencia de estos bloques serán:

$$G_1(s) = \frac{h'_1(s)}{F'_i(s)}$$

$$G_2(s) = \frac{h'_2(s)}{h'_1(s)}$$

Al tratarse de dos procesos en serie:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

Para calcular G_1 hay que obtener el modelo matemático que represente la variación con el tiempo del nivel de un depósito en función del caudal de entrada. Se trata del mismo modelo que el del ejemplo del capítulo 2, por tanto:

$$G_1 = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} = \frac{h'_1}{F'_i}$$

donde $K_1 = R_1$ y $\tau_1 = A_1 R_1$.

De igual manera para el segundo de los depósitos:

$$G_2 = \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} = \frac{h'_2}{F'_1}$$

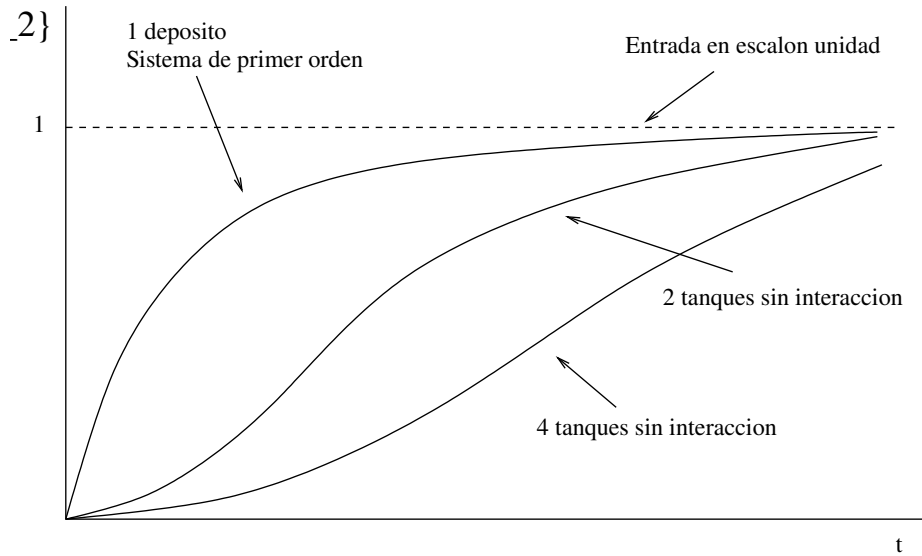
donde $K_2 = R_2$, $\tau_2 = A_2 R_2$ y $F'_1 = \frac{h'_1}{R_1}$.

Sustituyendo F'_1 y operando se encuentra la función de transferencia buscada:

$$G = \frac{K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

Se puede apreciar que se trata de un sistema de segundo orden. La respuesta de este sistema será sobreamortiguada ($\zeta > 1$), ya que las raíces del denominador son números reales.

En la figura siguiente se muestra la variación con el tiempo del nivel del depósito para un cambio en el caudal de entrada en forma de escalón unidad. Se observa que la dinámica es más lenta a medida que aumenta el número de tanques:



Tanques con interacción

Para obtener el modelo matemático se realizarán los Balances Macroscópicos de Materia a los tanques (se ha supuesto que la densidad es constante y que no depende del tiempo):

$$\text{Tanque 1: } A_1 \frac{dh_1}{dt} = F_i - F_1$$

$$\text{Tanque 2: } A_2 \frac{dh_2}{dt} = F_1 - F_2$$

Los caudales de salida de los tanques dependen de las resistencias lineales:

$$F_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$$

$$F_2 = \frac{h_2}{R_2}$$

El caudal de salida del primer tanque depende, lógicamente, de la diferencia de alturas entre los dos tanques ya que la presión ejercida por la columna de fluido depende de esa diferencia de nivel. En el caso de que h_2 fuera mayor que h_1 el fluido circularía en sentido contrario. Esta ecuación marca la interacción entre los tanques e impide que las ecuaciones de los balances de materia se puedan resolver de manera independiente. Las dos ecuaciones diferenciales se deben resolver de manera simultánea.

Sustituyendo los caudales en los balances de materia se encuentra:

$$\begin{aligned} A_1 R_1 \frac{dh_1}{dt} + h_1 - h_2 &= R_1 F_i \\ A_2 R_2 \frac{dh_2}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) h_2 - \frac{R_2}{R_1} h_1 &= 0 \end{aligned}$$

Tal como se ha comentado las dos ecuaciones diferenciales están ligadas (las incógnitas $h_1(t)$ y $h_2(t)$ aparecen en ambas ecuaciones), se deben resolver simultáneamente. Esta es la diferencia fundamental con los sistemas sin interacción.

A continuación se realizan los balances de materia en estado estacionario:

$$\begin{aligned} h_{1,e} - h_{2,e} &= R_1 F_i \\ \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) h_{2,e} - \frac{R_2}{R_1} h_{1,e} &= 0 \end{aligned}$$

donde los subíndices e indican los valores en estado estacionario.

Restando los balances de materia y los balances en estado estacionario:

$$\begin{aligned} A_1 R_1 \frac{dh'_1}{dt} + h'_1 - h'_2 &= R_1 F'_i \\ A_2 R_2 \frac{dh'_2}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) h'_2 - \frac{R_2}{R_1} h'_1 &= 0 \end{aligned}$$

tomando como variables de desviación:

$$\begin{aligned} h'_1 &= h_1 - h_{1,e} \\ h'_2 &= h_2 - h_{2,e} \\ F'_i &= F_i - F_{i,e} \end{aligned}$$

Haciendo la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} (A_1 R_1 s + 1) h'_1(s) - h'_2(s) &= R_1 F'_i(s) \\ \left[A_2 R_2 s + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \right] h'_2(s) - \frac{R_2}{R_1} h'_1(s) &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} h'_1 &= \frac{(\tau_2 R_1) s + R_1 + R_2}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2) s + 1} F'_i \\ h'_2 &= \frac{R_2}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2) s + 1} F'_i \end{aligned}$$

donde $\tau_1 = A_1 R_1$ y $\tau_2 = A_2 R_2$.

La respuesta es igual a la de los tanques sin interacción excepto por el término $A_1 R_2$ del denominador. Es el factor de interacción, ya que cuanto mayor sea mayor es la interacción entre los tanques.

La respuesta, de nuevo, es sobreamortiguada pero más lenta que la del sistema sin interacción. Para el sistema de tanques sin interacción, la constante de tiempo es:

$$\tau_{\text{sin}} = \sqrt{\tau_1 + \tau_2}$$

Para el sistema de tanques con interacción:

$$\tau_{\text{con}} = \sqrt{\tau_1 + \tau_2 + A_1 R_2}$$

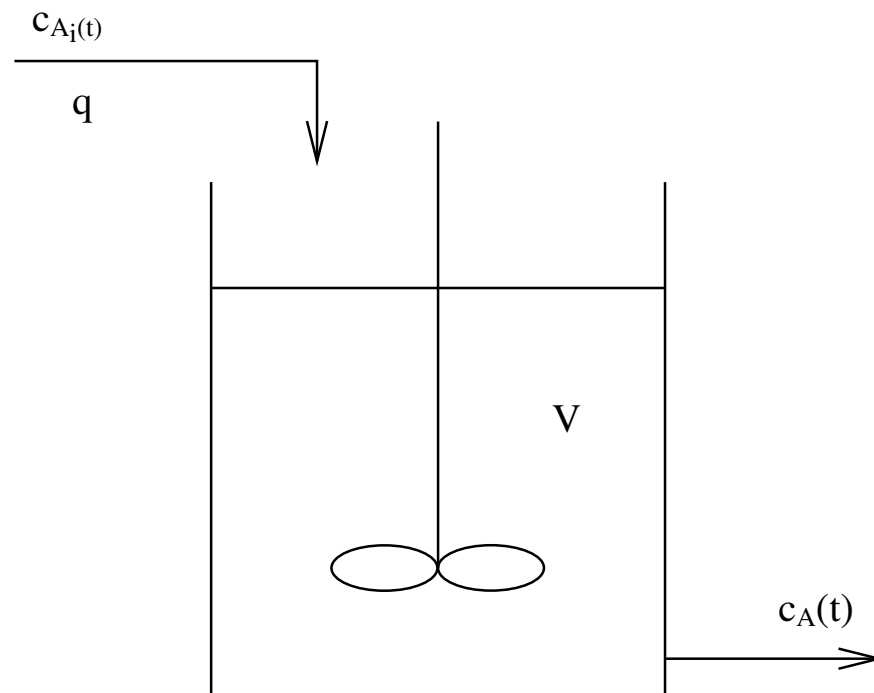
Al ser el factor de interacción positivo es evidente que $\tau_{\text{con}} > \tau_{\text{sin}}$.

Problema 3.7

En un reactor tanque agitado se lleva a cabo una reacción irreversible de primer orden, $A \rightarrow B$, con un coeficiente cinético $k = 1 \text{ h}^{-1}$. El caudal de alimentación es de 10 l/min , con $c_{A_0} = 0.5 \text{ mol/l}$. El volumen del tanque es de 1 m^3 . Determinar el efecto causado por una subida instantánea de la concentración a 0.7 mol/l . Indicar cual hubiese sido el transitorio, si la perturbación se hubiera producido en forma de impulso unidad. Cuáles serán la ganancia y la constante de tiempo del sistema?

💡 Solución

A partir del enunciado del problema se puede realizar el siguiente diagrama de flujo:

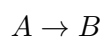


donde:

$$\begin{cases} q = 10 \text{ l/min} = 0.6 \text{ m}^3/\text{h} \\ V = 1 \text{ m}^3 \end{cases}$$

El subíndice A indica que es la concentración del componente A y el subíndice i indica que se trata de la concentración de entrada.

La reacción química que se produce en el reactor es la siguiente:



cuya constante cinética es $k = 1 \text{ h}^{-1}$.

La concentración de entrada en el reactor antes de que se produzca el cambio de la concentración en escalón es $c_{Ai_0} = c_{Ai}(t = 0) = 0.5 \text{ mol/l}$.

A continuación hay que plantear el balance macroscópico de materia en estado no estacionario (BMM):

$$V \frac{dc_A}{dt} = qc_{Ai} - qc_A - kc_A V$$

donde se ha supuesto que los caudales volumétricos (q), las densidades (ρ) y el volumen del reactor (V) son constantes e independientes del tiempo.

El balance macroscópico de materia en estado estacionario (BMMe) del sistema es:

$$0 = qc_{Ai_0} - qc_{Ae} - kc_{Ae} V$$

donde el subíndice e indica que se trata de las concentraciones en estado estacionario. Este balance representa la situación antes de que se produzca ningún cambio.

Operando la ecuación anterior:

$$qc_{Ai_0} = c_{Ae}(q + kV)$$

El tiempo de residencia del reactor es:

$$\theta = \frac{V}{q}$$

Sustituyendo y operando:

$$c_{Ae} = \frac{c_{Ai_0}}{1 + k\theta}$$

Sustituyendo los valores de las variables se obtiene que la concentración de salida del reactor del componente A en estado estacionario, es decir, para tiempos menores o iguales a cero es:

$$c_{Ae} = 0.1875 \text{ mol/l}$$

El siguiente paso es definir las variables de desviación para la entrada:

$$C_{Ai} = c_{Ai} - c_{Ai_0}$$

y para la salida:

$$C_A = c_A - c_{Ae}$$

Restando el BMMe al BMM se obtiene:

$$V \frac{dc_A}{dt} = q(c_{Ai} - c_{Ai_0}) - q(c_A - c_{Ae}) - k(c_A - c_{Ae})V$$

Sustituyendo las variables de desviación y operando:

$$V \frac{dC_A}{dt} = qC_{Ai} - C_A(q + kV)$$

Esta última ecuación es el modelo matemático del proceso planteado. Con objeto de resolver la ecuación diferencial se aplica la transformada de Laplace a la ecuación anterior:

$$Vs\overline{C_A} = q\overline{C_{Ai}} - \overline{C_A}(q + kV)$$

Para poder responder a las preguntas propuestas por el problema hay que plantear la siguiente función de transferencia:

$$G = \frac{\overline{C_A}}{\overline{C_{Ai}}}$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$G = \frac{q}{Vs + q + kV} = \frac{\frac{q}{q+kV}}{\frac{V}{q+kV}s + 1} = \frac{\frac{1}{1+k\theta}}{\frac{1}{\theta^{-1}+k}s + 1}$$

Lógicamente la función de transferencia es la propia de un sistema de primer orden. La ganancia del proceso será:

$$K = \frac{1}{1 + k\theta} = 0.375$$

Y la constante de tiempo es:

$$\tau = \frac{1}{\theta^{-1} + k} = 0.625h = 37.5 \text{ min}$$

El efecto de un cambio súbito de concentración de 0.5 a 0.7 mol/l, es decir, para una entrada en escalón de altura 0.2 mol/l es:

$$C_A = 0.375 \cdot 0.2 \text{ mol/l} \left(1 - e^{-\frac{t}{37.5 \text{ min}}}\right) = 0.075 \text{ mol/l} \left(1 - e^{-\frac{t}{37.5 \text{ min}}}\right)$$

Deshaciendo las variables de desviación se obtiene la ecuación que describirá la variación de la concentración del componente A en función del tiempo:

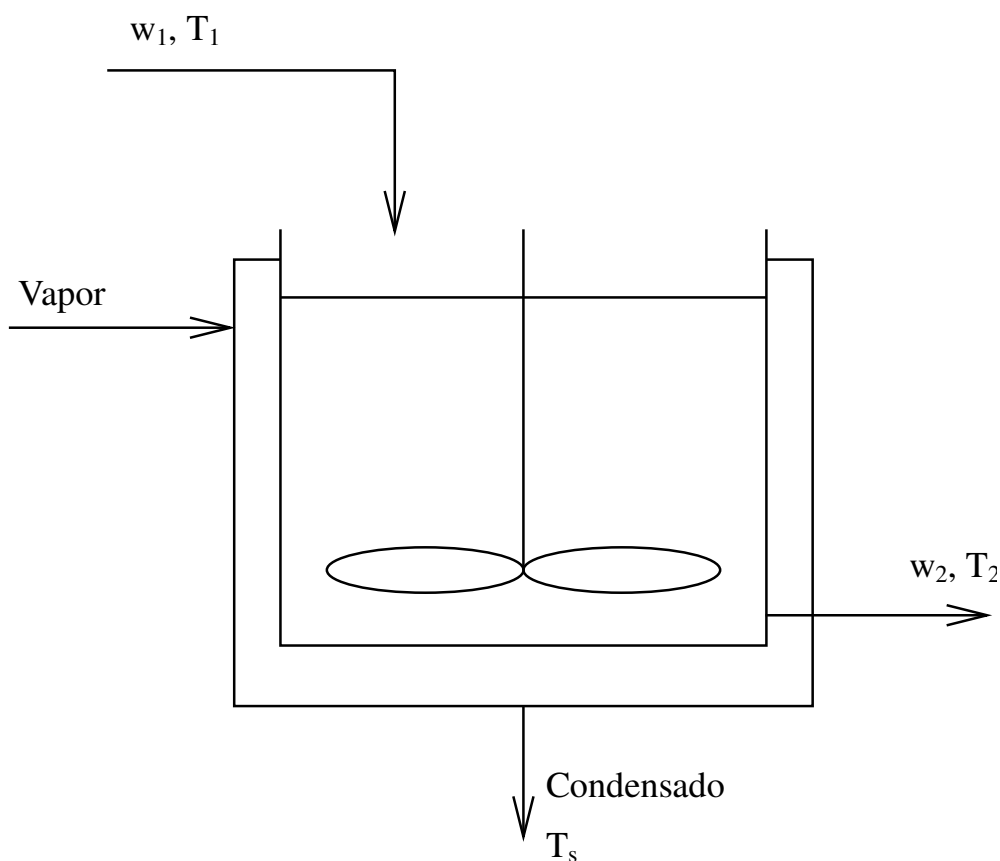
$$c_A = 0.075 \text{ mol/l} \left(1 - e^{-\frac{t}{37.5 \text{ min}}}\right) + 0.1875 \text{ mol/l}$$

Para una entrada que sea un impulso unidad la respuesta es:

$$C_A = \frac{KA}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.6 \text{ mol/l} e^{-\frac{t}{37.5 \text{ min}}}$$

Problema 3.8

Considerar el tanque encamisado de la figura utilizado como precalentador. Suponiendo que la capacitancia de la pared del tanque es despreciable y que la temperatura en el interior del mismo es uniforme.



Deducir:

- La función de transferencia para variaciones de T_1 y/o T_s .
- El diagrama de bloques del sistema.
- La respuesta del sistema para una entrada en escalón unidad en T_1 (T_s cte).

💡 Solución

- a) En este problema se plantea un proceso con dos entradas (T_1 y T_s) y una respuesta (T_2). En primer lugar se plantea el Balance Macroscópico de Energía:

$$mC_p \frac{dT_2}{dt} = wC_p(T_1 - T_2) + UA(T_s - T_2) \quad (3.12)$$

donde m es la cantidad de líquido a calentar en el interior del tanque, C_p es el calor específico, U es el coeficiente global de transferencia de calor y A es el área de intercambio. Como el enunciado del problema no indica que exista ningún sistema de control de nivel se asume que los caudales de las corrientes de entrada y de salida son iguales ($w_1 = w_2 = w$).

Operando y agrupando constantes en la Ecuación 3.12 se obtiene:

$$\tau \frac{dT_2}{dt} + T_2 = k_1 T_1 + k_2 T_s \quad (3.13)$$

donde:

$$\tau = \frac{mC_p}{wC_p + UA}$$

$$k_1 = \frac{wC_p}{wC_p + UA}$$

$$k_2 = \frac{UA}{wC_p + UA}$$

A continuación se realiza el Balance Macroscópico de Energía en estado estacionario:

$$0 = k_1 T_{1,e} + k_2 T_{s,e} - T_{2,e} \quad (3.14)$$

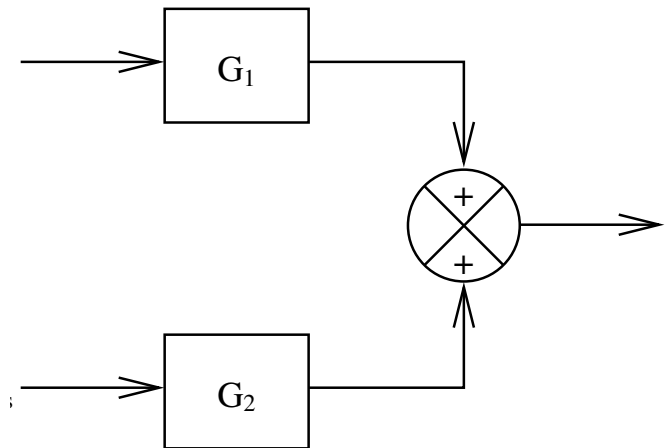
Restando la Ecuación 3.13 y Ecuación 3.14, definiendo variables de desviación y realizando la transformada de Laplace a la ecuación resultante se obtiene:

$$\tau s \bar{T}'_2 + \bar{T}'_2 = k_1 \bar{T}'_1 + k_2 \bar{T}'_s$$

$$\bar{T}'_2 = \frac{k_1}{\tau s + 1} \bar{T}'_1 + \frac{k_2}{\tau s + 1} \bar{T}'_s$$

donde las prima indica que se trata de variables de desviación.

b) El diagrama de bloques de este proceso es:



donde:

$$G_1 = \frac{k_1}{\tau s + 1}$$

$$G_2 = \frac{k_2}{\tau s + 1}$$

c) La variación de la temperatura de la corriente de salida del tanque para un cambio en escalón unidad de T_1 será:

$$\bar{T}'_2 = \frac{k_1}{\tau s + 1} \frac{1}{s} + 0$$

Realizando la transformada inversa de Laplace y deshaciendo las variables de desviación se obtiene:

$$T_2 = T_{2,e} + k_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

4 Sistemas lineales de primer orden

4.1 Definición de sistema lineal de primer orden

Un sistema de primer orden es aquel cuya salida $y(t)$ puede ser modelada por una ecuación diferencial de primer orden como:

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b f(t) \quad (4.1)$$

donde $f(t)$ es la entrada al sistema.

Si $a_0 \neq 0$:

$$\frac{a_1}{a_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{b}{a_0} f(t)$$

Si se define $\frac{a_1}{a_0} = \tau_p$ y $\frac{b}{a_0} = K_p$ y se sustituye en la ecuación anterior se obtiene:

$$\tau_p \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_p f(t) \quad (4.2)$$

donde:

- τ_p es la constante de tiempo del proceso
- K_p es la ganancia del proceso

Si $y(t)$ y $f(t)$ están definidos mediante la utilización de variables de desviación alrededor del estado estacionario, las condiciones iniciales son $y(0) = 0$ y $f(0) = 0$.

Operando se encuentra la función de transferencia de un proceso de primer orden:

$$G(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1}$$

Los sistemas de primer orden son los más frecuentes en los procesos de la industria alimentaria, por ello su estudio es de gran importancia. Estos sistemas se caracterizan por:

1. Su capacidad de almacenar materia, energía o cantidad de movimiento. Esta capacidad está directamente relacionada con la ganancia del proceso.
2. Una resistencia asociada con el caudal de materia, energía o cantidad de movimiento. Esta resistencia o inercia viene dada por la constante de tiempo.

En el caso particular de que $a_0 = 0$:

$$G(s) = \frac{K_p}{\tau_p s}$$

Se trata de aquellos sistemas de primer orden denominados integradores puros y se hablará de ellos más adelante.

4.2 Respuesta a una entrada en escalón

Para un escalón de altura A y un sistema de primer orden la salida $y(s)$ es:

$$y(s) = \frac{A}{s} \frac{K_p}{\tau_p s + 1} \quad (4.3)$$

En tiempo real, invirtiendo las transformadas de Laplace, se obtiene:

$$y(t) = AK_p \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right) \quad (4.4)$$

Podemos reproducir este cálculo utilizando SymPy. Como es habitual, empezamos definiendo las variables necesarias y cargando las librerías que vamos a utilizar:

```
using SymPy, Plots, Markdown, LaTeXStrings, Printf

# Definimos las variables de nuestro sistema
# Especificamos que la constante de tiempo es siempre positiva

@syms t::real A::real K_p::real tau_p::positive s

(t, A, K_p, tau_p, s)
```

Definición de la función de transferencia del proceso, $G(s)$:

```
G = K_p/(tau_p*s + 1)
```

$$\frac{K_p}{s\tau_p + 1}$$

La función de entrada es un escalón de altura A , $f(s)$:

```
f = A/s
```

$$\frac{A}{s}$$

Por lo tanto, la respuesta del proceso $y(s)$ es:

```
y_s = G*f
```

$$\frac{AK_p}{s(s\tau_p + 1)}$$

Realizando la transformada inversa de Laplace de $y(s)$ obtenemos la respuesta del proceso en tiempo real, $y(t)$:

```
y = sympy.inverse_laplace_transform(y_s, s, t)
```

$$AK_p \left(\theta(t) - e^{-\frac{t}{\tau_p}} \theta(t) \right)$$

Representando la función en coordenadas adimensionales, $\frac{y(t)}{AK_p}$ frente a $\frac{t}{\tau_p}$, se obtiene la típica salida de un sistema de primer orden:

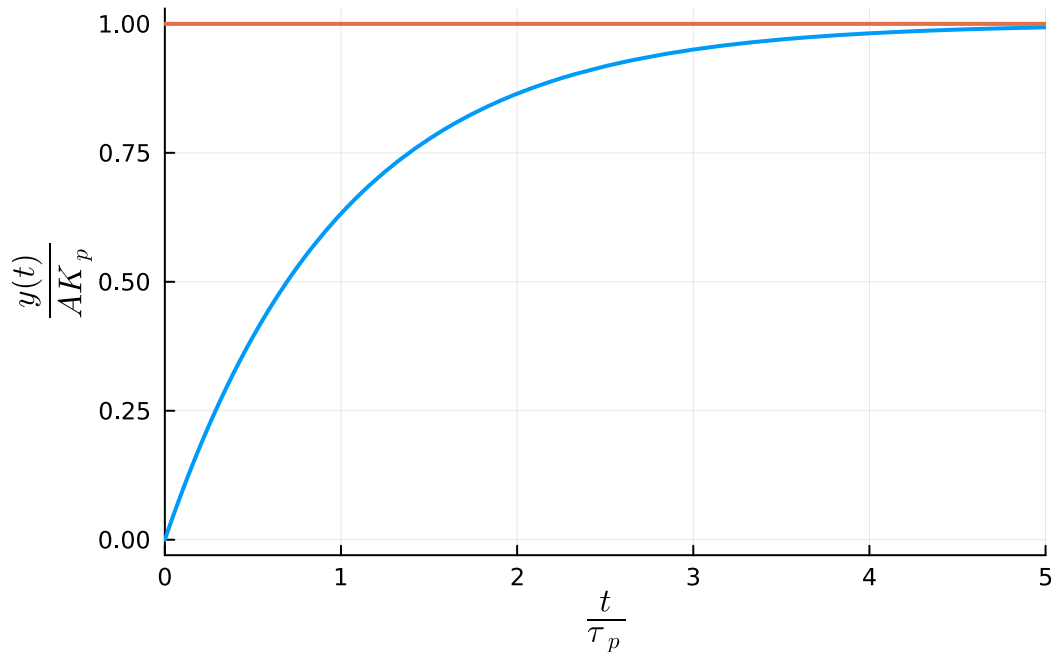


Figura 4.1: Respuesta de un sistema de primer orden a una entrada en escalón de altura A .

4.3 Propiedades de un sistema de primer orden

Cabe destacar las siguientes características de cualquier sistema de primer orden:

4.3.1 Autorregulación

El proceso alcanza un nuevo estado estacionario sin necesidad de un sistema de control, tal como se muestra en la Figura 4.1.

Se puede comprobar que la respuesta a tiempos largos se encuentra acotada o que tiende a un valor concreto.

La salida del proceso en el nuevo estado estacionario es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = AK_p$$

Podemos comprobar

`sympy.limit(y, t, oo)`

$$AK_p$$

Cuanto mayor es la ganancia menor debe ser la entrada del sistema (perturbación) para producir el mismo efecto final.

Puede ocurrir que la constante a_0 de la Ecuación 4.1 sea nula. Este tipo de procesos se conocen como *integradores puros*, ya que la salida es la integral de la entrada con el tiempo. Estos procesos pueden

ser difíciles de controlar debido a que no presentan autorregulación. Ejemplos comunes de este tipo de sistemas son los tanques con líquidos, depósitos de gases y sistemas de almacenamiento de materias primas y productos.

4.3.2 Velocidad de la respuesta

Para calcular la velocidad de la respuesta hay que encontrar la pendiente de la respuesta:

$$\frac{d \left[\frac{y(t)}{AK_p} \right]}{dt} = \frac{1}{\tau_p} e^{-\frac{t}{\tau_p}}$$

Para $t = 0$:

$$\frac{d \left[\frac{y(t)}{AK_p} \right]}{dt} = \frac{1}{\tau_p}$$

Cuanto mayor sea τ_p , menor será la pendiente inicial de la respuesta del sistema y mayor será el tiempo necesario en alcanzar el nuevo estado estacionario.

Evaluando la Ecuación 4.4 para diferentes tiempo se obtiene la siguiente tabla:

Tabla 4.1: Evolución de la salida de un sistema de primer orden con el tiempo.

Tiempo transcurrido	$1\tau_p$	$2\tau_p$	$3\tau_p$	$4\tau_p$
$y(t)$ respecto a su valor estacionario	0.632	0.865	0.950	0.982

El cálculo de estos valores es muy sencillo:

```
# Calculamos los valores de y(t) para 0, 1, 2, 3 y 4
println("  y(t)/A")
for 1:4
    output = y(A=>1, K_p=>1, tau_p=>1, t=>)
    @printf "%d  %.3f" output
    println()
end
```

```

y(t)/A
1  0.632
2  0.865
3  0.950
4  0.982
```

Transcurrido cuatro veces la constante de tiempo del proceso se puede asegurar que ha llegado el sistema al nuevo estado estacionario.

4.4 Respuesta a una función impulso

Al introducir un impulso de área A se obtiene la siguiente respuesta:

$$y(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} A$$

que en tiempo real es:

$$y(t) = \frac{K_p A}{\tau_p} e^{-\frac{t}{\tau_p}}$$

Como en el caso de una entrada en escalón, podemos reproducir con SymPy el cálculo de la respuesta de un proceso de primer orden a una entrada en escalón:

```
using SymPy, Plots, LaTeXStrings
```

```
@syms t::real K_p::real A::real tau_p::positive s
```

```
f = A
```

```
G = K_p/(tau_p*s + 1)
```

```
y = sympy.inverse_laplace_transform(G*f, s, t)
```

$$\frac{AK_p e^{-\frac{t}{\tau_p}} \theta(t)}{\tau_p}$$

De forma adimensional se puede escribir:

$$\frac{y(t)}{K_p A} = e^{-\frac{t}{\tau_p}}$$

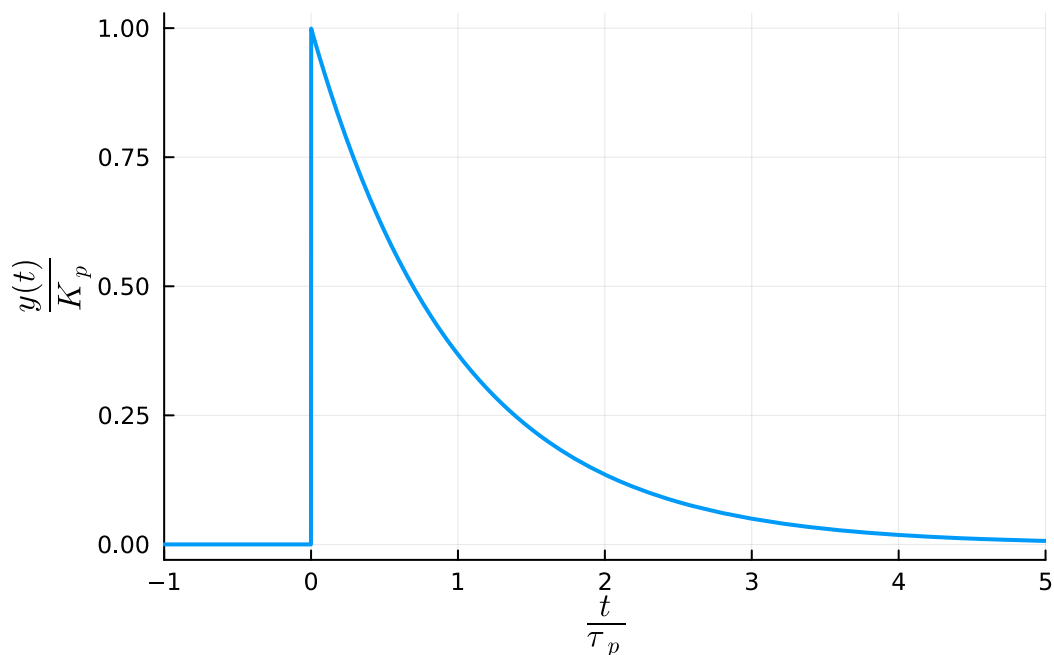


Figura 4.2: Respuesta de un sistema de primer orden a una entrada impulso unidad.

Se obtiene la función simétrica a la respuesta a una entrada en escalón, lo que implica que tiene las mismas características.

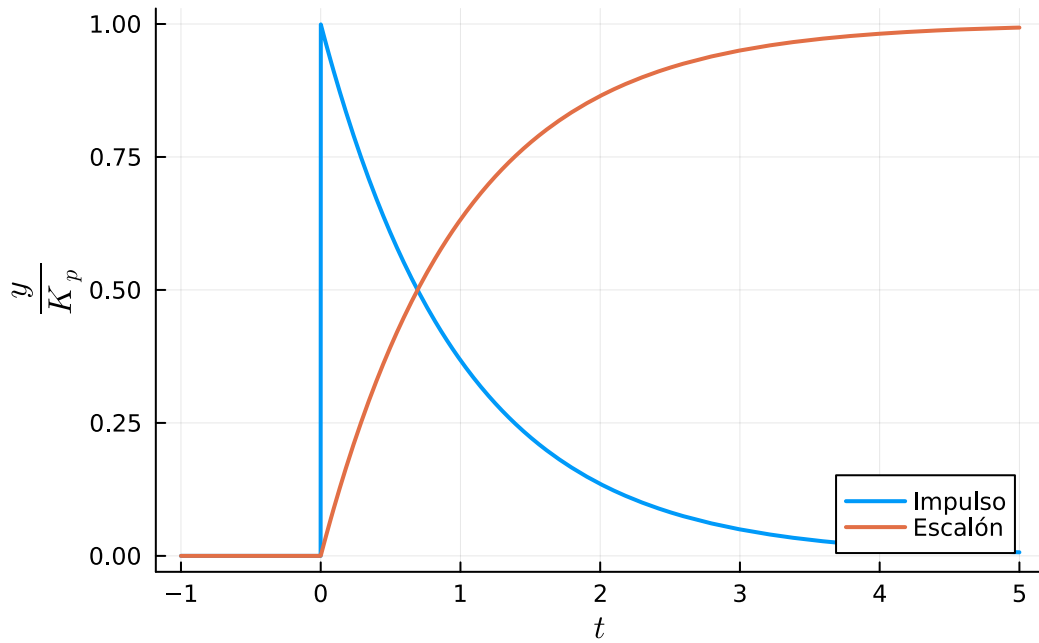


Figura 4.3: En la figura se muestra la respuesta de un sistema de primer orden a una entrada en escalón unidad y a un impulso unidad.

4.5 Respuesta a una función sinusoidal

Para una entrada sinusoidal de tipo:

$$f(t) = MU(t) \sin \omega t$$

se obtiene la siguiente respuesta:

$$y(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} \frac{M\omega}{s^2 + \omega^2}$$

que en tiempo real es:

$$y(t) = \frac{K_p M}{1 + \omega^2 \tau_p^2} \left(\omega \tau_p e^{-\frac{t}{\tau_p}} \cos \omega t + \sin \omega t \right)$$

Aplicando la propiedad trigonométrica:

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha = z \sin(\alpha + \varphi)$$

donde $z^2 = x^2 + y^2$ y $\tan \varphi = \frac{y}{x}$, se obtiene:

$$y(t) = \frac{K_p M \omega \tau_p}{1 + \omega^2 \tau_p^2} e^{-\frac{t}{\tau_p}} + \frac{K_p M}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_p^2}} \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.5)$$

donde $\varphi = \text{atan}(-\omega\tau_p)$.

El primer término de la respuesta es un término transitorio, ya que tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Este término pierde importancia para tiempos grandes:

$$y(t) = \underbrace{\frac{K_p M \omega \tau_p}{1 + \omega^2 \tau_p^2} e^{-\frac{t}{\tau_p}}}_{\substack{\text{Transitorio} \\ \downarrow t \rightarrow \infty \\ 0}} + \underbrace{\frac{K_p M}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_p^2}} \sin(\omega t + \varphi)}_{\text{Estacionario}}$$

La respuesta obtenida es de tipo sinusoidal con la misma frecuencia de oscilación ω que la entrada pero con un desfase φ . Además, el desfase está directamente relacionado con la frecuencia angular. Al aumentar el desfase, aumenta el desfase.

En el caso de que la frecuencia angular tienda a infinito, el desfase tiende a $\frac{\pi}{2}$, que es el desfase máximo.

También se puede obtener un resultado equivalente utilizando SymPy:

using SymPy, Plots

```
@syms t::real Kp::real=>"K_p" M::real w::real=>"omega" Tp::real=>"tau_p" s
```

```
L(f) = sympy.laplace_transform(f, t, s, noconds=true)
```

```
iL(f) = sympy.inverse_laplace_transform(f, s, t)
```

```
f = L(M*sin(w*t))
```

```
G = Kp/(Tp*s+1)
```

```
y = iL(G*f)
```

$$K_p M \omega \left(\frac{\tau_p^2 e^{-\frac{t(\omega^2 \tau_p^2 + 1)}{\omega^2 \tau_p^2 + \tau_p}}}{\omega^2 \tau_p^3 + \tau_p} \theta(t) + \left(-\frac{\tau_p \cos(\omega t)}{\omega^2 \tau_p^2 + 1} + \frac{\sin(t|\omega|)}{(\omega^2 \tau_p^2 + 1)|\omega|} \right) \theta(t) \right)$$

4.6 Problemas

Problema 4.1

Estudiar la respuesta de un proceso de función de transferencia:

$$G(s) = K_p \frac{\tau s + 1}{\tau_p s + 1}$$

con las siguientes entradas:

- Función escalón unidad
- Entrada sinusoidal. Estudiar especialmente el comportamiento a tiempos largos, es decir, para $t \rightarrow \infty$.

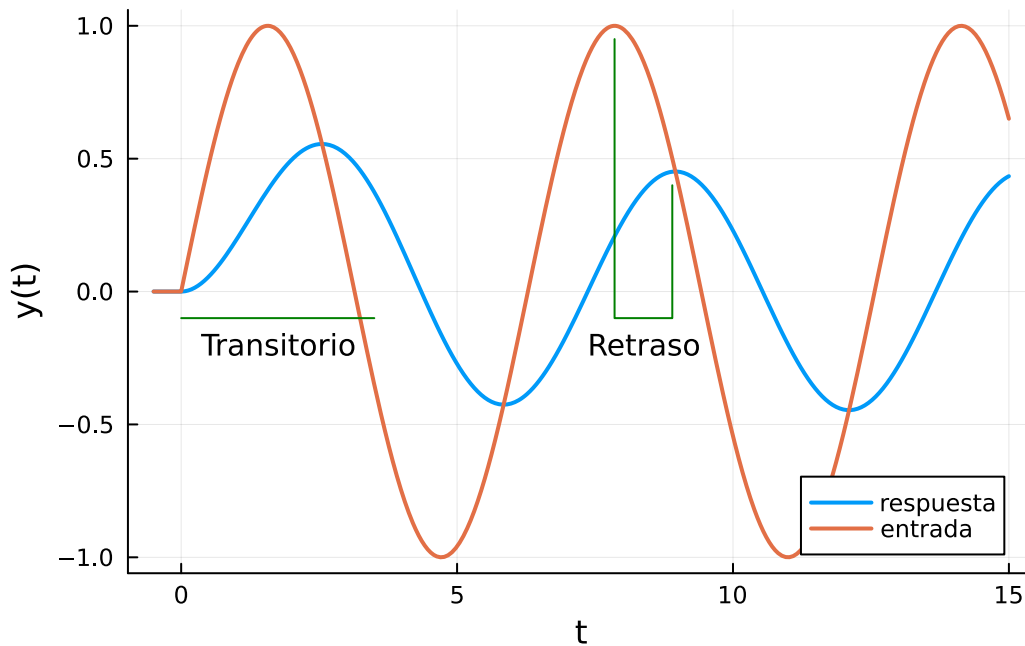


Figura 4.4: Respuesta oscilatoria de un sistema de primer orden.

💡 Solución

a) La respuesta de este proceso para una entrada en escalón unidad será:

$$y(s) = G(s) \frac{1}{s} = K_p \frac{\tau s + 1}{\tau_p s + 1} \frac{1}{s}$$

Para obtener la respuesta en tiempo real hay que realizar la transformada inversa de Laplace:

using SymPy, Plots

```
@syms t::real Kp::real=>"K_p" T::real=>"tau" Tp::real=>"tau_p" s
```

```
G = Kp*(T*s+1)/(Tp*s+1)
```

```
f = 1/s
```

```
y = G*f
```

```
y_t = sympy.inverse_laplace_transform(y, s, t)
```

```
y_t = expand(y_t)
```

```
y_t = collect(y_t, Kp)
```

```
y_t = collect(y_t, exp(-t/Tp))
```

$$K_p \left(\left(\frac{\tau \theta(t)}{\tau_p} - \theta(t) \right) e^{-\frac{t}{\tau_p}} + \theta(t) \right)$$

Es decir, la ecuación anterior se obtiene:

$$y(t) = K_p \left[1 - \left(1 - \frac{\tau}{\tau_p} \right) e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right]$$

Se obtiene una ecuación muy similar a la Ecuación 4.4. Evidentemente, el sentido físico e influencia sobre la respuesta del sistema de la ganancia del proceso (K_p) serán los mismos que para un

sistema de primer orden. La influencia de la constante de tiempo del proceso (τ_p) también será muy parecida.

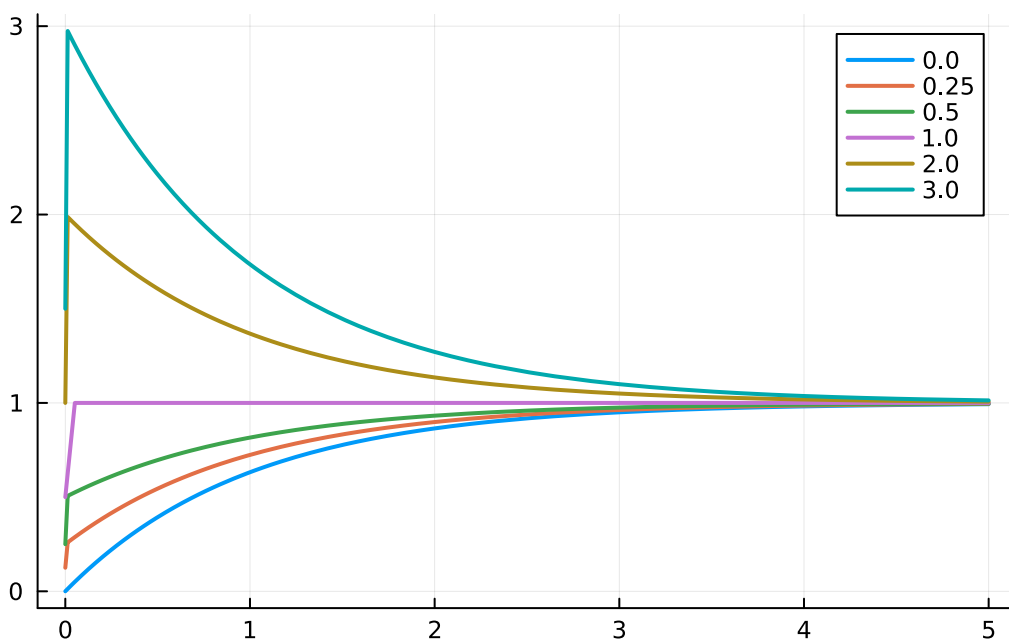
La única diferencia es el término τ/τ_p . Para ver el significado físico de la constante de tiempo τ se puede representar la respuesta para diferentes valores ($K_p = \tau_p = 1$):

```
taus = [0, .25, .5, 1, 2, 3]

p = plot()

for tau in taus
    plot!(y_t(Kp=>1, Tp=>1, T=>tau), 0, 5, label=tau, lw=2)
end
```

p



Se observa como τ , para valores inferiores a la unidad, actúa como un adelanto, avanza la respuesta del proceso de primer orden en un valor igual a τ .

En el caso de una entrada sinusoidal ($\sin(\omega t)$), la transformada de Laplace de la respuesta es:

$$y(s) = \frac{K_p(\tau s + 1)}{\tau_p s + 1} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Recurriendo de nuevo a SymPy para realizar la transformada inversa de Laplace:

```
w = symbols("omega", real=true)

f_t = sin(w*t)

f = sympy.laplace_transform(f_t, t, s, noconds=true)

y = G*f

y_t = sympy.inverse_laplace_transform(y, s, t)
```

$$K_p \omega \left(\left(\frac{(\tau - \tau_p) \cos(\omega t)}{\omega^2 \tau_p^2 + 1} + \frac{(\omega^2 \tau_p + 1) \sin(t|\omega|)}{(\omega^2 \tau_p^2 + 1)|\omega|} \right) \theta(t) + \frac{(-\tau_p + \tau_p^2) e^{-\frac{t(\omega^2 \tau_p^2 + 1)}{\omega^2 \tau_p^3 + \tau_p}}}{\omega^2 \tau_p^3 + \tau_p} \theta(t) \right)$$

```

y_t = cancel(y_t)
y_t = collect(y_t, exp(t/Tp))
y_t = collect(y_t, sin(w*t))
y_t = collect(y_t, cos(w*t))

```

$$\frac{\left(-K_p \omega \tau |\omega| \theta(t) + K_p \omega \tau_p |\omega| \theta(t) + (K_p \omega^3 \tau \tau_p \sin(t|\omega|) \theta(t) + K_p \omega \sin(t|\omega|) \theta(t) + (K_p \omega \tau |\omega| \theta(t) - K_p \omega \tau_p |\omega| \theta(t)) \cos(\omega t)) e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right)}{\omega^2 \tau_p^2 |\omega| + |\omega|}$$

Es decir:

$$y(t) = \frac{(K_p \omega \tau_p^2 - K_p \omega \tau \tau_p) e^{-\frac{t}{\tau_p}}}{\tau_p (\omega^2 \tau_p^2 + 1)} + \frac{K_p \omega^3 \tau \tau_p + K_p \omega}{\omega (\omega^2 \tau_p^2 + 1)} \sin(\omega t) - \frac{K_p \omega \tau_p - K_p \omega \tau}{\omega^2 \tau_p^2 + 1} \cos(\omega t)$$

Considerando la propiedad trigonométrica:

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha = z \sin(\alpha + \varphi)$$

donde $z^2 = x^2 + y^2$ y $\tan \varphi = \frac{y}{x}$, se obtiene:

$$y(t) = \frac{(K_p \omega \tau_p^2 - K_p \omega \tau \tau_p) e^{-\frac{t}{\tau_p}}}{\tau_p (\omega^2 \tau_p^2 + 1)} + \sqrt{\frac{K_p^2 \omega^2 \tau^2 + K_p^2}{\omega^2 \tau_p^2 + 1}} \sin(\omega t + \varphi)$$

donde

$$\varphi = \text{atan} \left(\frac{\omega^2 (K_p \omega \tau_p - K_p \omega \tau)^2}{(K_p \omega^3 \tau \tau_p + K_p \omega)^2} \right) = \text{atan} \left(\frac{\omega^2 (\tau_p - \tau)^2}{(\omega^2 \tau_p + 1)^2} \right).$$

Se obtiene una respuesta con una parte transitoria, que rápidamente se anula al aumentar el tiempo:

$$\text{Transitorio} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(K_p \omega \tau_p^2 - K_p \omega \tau \tau_p) e^{-\frac{t}{\tau_p}}}{\tau_p (\omega^2 \tau_p^2 + 1)} = 0$$

La parte estacionaria de la respuesta es:

$$y(t) = K_p \sqrt{\frac{\omega^2 \tau^2 + 1}{\omega^2 \tau_p^2 + 1}} \sin(\omega t + \varphi)$$

Si se compara la respuesta estacionaria respecto a la entrada se comprueba que tiene la misma frecuencia angular ω y que tiene un desfase φ , lo que significa que está retrasada. Este desfase depende de la frecuencia angular. La amplitud de la respuesta también depende de la frecuencia angular de la entrada.

Nuevamente la respuesta obtenida es muy similar a la de un proceso de primer orden. Por tanto, la influencia de la ganancia y constante de tiempo del proceso serán similares.

La constante de tiempo τ nuevamente actúa como un adelanto, compensando en cierta medida el efecto de la constante de tiempo del proceso. Al aumentar su valor disminuye el desfase y la amplitud disminuye en menor medida que para un proceso de primer orden.

Problema 4.2

Dibujar la respuesta de un sistema de primer orden de constante de tiempo 0.5 y ganancia 1 para las siguientes entradas:

- Un impulso unidad

- b. Un pulso unidad de duración 5
- c. Un cambio sinusoidal de amplitud unidad y frecuencia $\omega = 0.5$.

Problema 4.3

Sea un sistema de primer orden de ganancia unidad y constante de tiempo 0.5. Inicialmente el sistema está en estado estacionario. Se introduce una entrada en rampa cuando el tiempo es igual a 0.

- a. Desarrollar una expresión que muestre los cambios en el proceso con el tiempo.
- b. ¿Cuál es la mínima y la máxima diferencia entre la entrada y la salida?
- c. Dibujar la entrada y la salida en función del tiempo.

Solución

- a) Hay varias estrategias para desarrollar una expresión que muestre los cambios en el proceso tras una rampa unidad ($y(t)$). Se puede resolver directamente la ecuación diferencial o se puede utilizar la función de transferencia y realizar la transformada inversa de Laplace.

Resolución de la ecuación diferencial

Un sistema de primer orden viene descrito por la siguiente ecuación diferencial (Ecuación 4.2):

$$\tau_p \frac{dy}{dt} + y = K_p f(t)$$

donde $f(t)$ es la entrada al sistema, en nuestro caso una rampa unidad ($f(t) = t$). Sustituyendo las constantes y la función de entrada, se obtiene la ecuación diferencial a resolver:

$$0.5 \frac{dy}{dt} + y = t$$

Se puede resolver la ecuación diferencial utilizando SymPy:

using SymPy

```
@syms t::real y()
```

```
D = Differential(t)
```

```
eq = 1//2*D(y(t))+ y(t) ~ t
```

$$y(t) + \frac{d}{dt} \frac{y(t)}{2} = t$$

Se ha supuesto que se están utilizando variables de desviación, lo que supone que $y(t=0) = 0$:

```
ics = Dict(y(0)=>0);
```

Resolviendo la ecuación diferencial, se obtiene:

```
dsolve(eq, ics=ics)
```

$$y(t) = t - \frac{1}{2} + \frac{e^{-2t}}{2}$$

Función de transferencia

La función de transferencia de este proceso es:

$$G = \frac{y(s)}{f(s)} = \frac{1}{0.5s + 1}$$

y la entrada es una rampa unidad, cuya transformada de Laplace es:

$$f(s) = \frac{1}{s^2}$$

Por tanto la respuesta del proceso es:

$$y(s) = Gf(s) = \frac{1}{0.5s + 1} \frac{1}{s^2}$$

Para obtener la respuesta dependiente del tiempo hay que realizar la transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{0.5s + 1} \frac{1}{s^2} \right)$$

Para realizar la transformada inversa se puede utilizar la técnica de separar en fracciones simples o simplemente utilizar SymPy:

`@syms s`

```
y_t = sympy.inverse_laplace_transform(1/(1//2*s+1)*1/s^2, s, t)
expand(y_t)
```

$$t\theta(t) - \frac{\theta(t)}{2} + \frac{e^{-2t}\theta(t)}{2}$$

Lógicamente, la respuesta obtenida es igual a la obtenida por el método anterior.

b) La diferencia entre la entrada y la salida es:

$$y(t) - f(t) = \frac{e^{-2t}}{2} - \frac{1}{2}$$

La función exponencial es continua y decreciente, si se trata de exponentes negativos, para valores de t mayores que cero, como es el caso. Cuando $t = 0$, $e^{-2t} = 1$. Si el tiempo tiende a infinito, $e^{-2t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Por tanto, la diferencia mínima se dará cuando el tiempo es igual a cero, en ese caso la diferencia es de 0. La diferencia máxima se produce cuando el tiempo tiende a infinito, la diferencia es $y(t) - f(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{2}$.

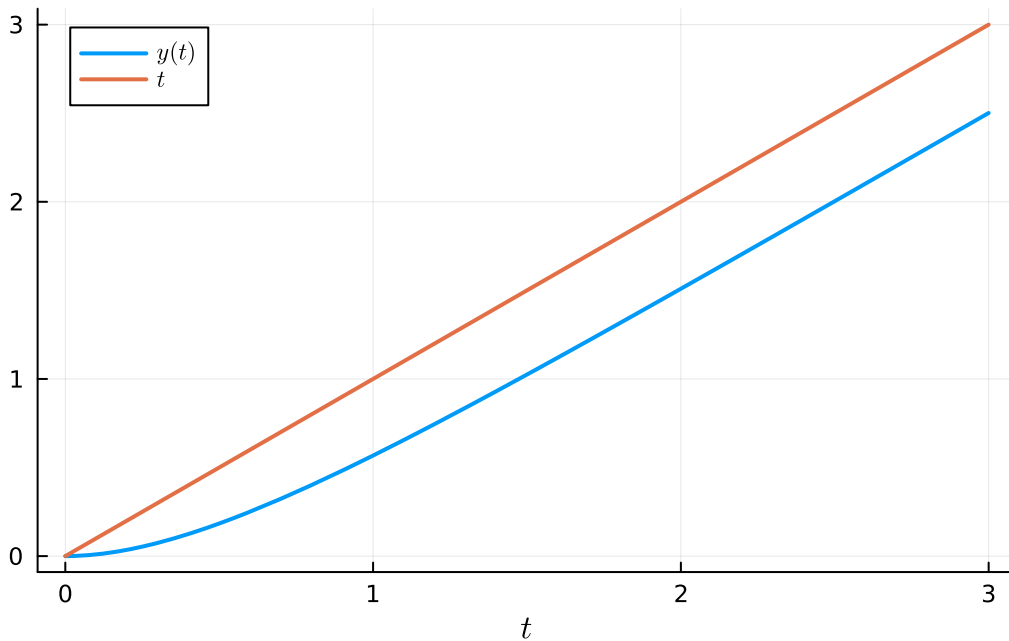
c) El gráfico de la entrada y la salida en función del tiempo es:

Esta gráfica se ha dibujado a partir de la función respuesta obtenida en el apartado a). En caso de no querer obtener esa función se puede programar el problema con [Xcos](#) o [Simulink](#) y obtener el resultado mediante métodos numéricos.

A continuación se muestra el programa junto con el resultado obtenido:

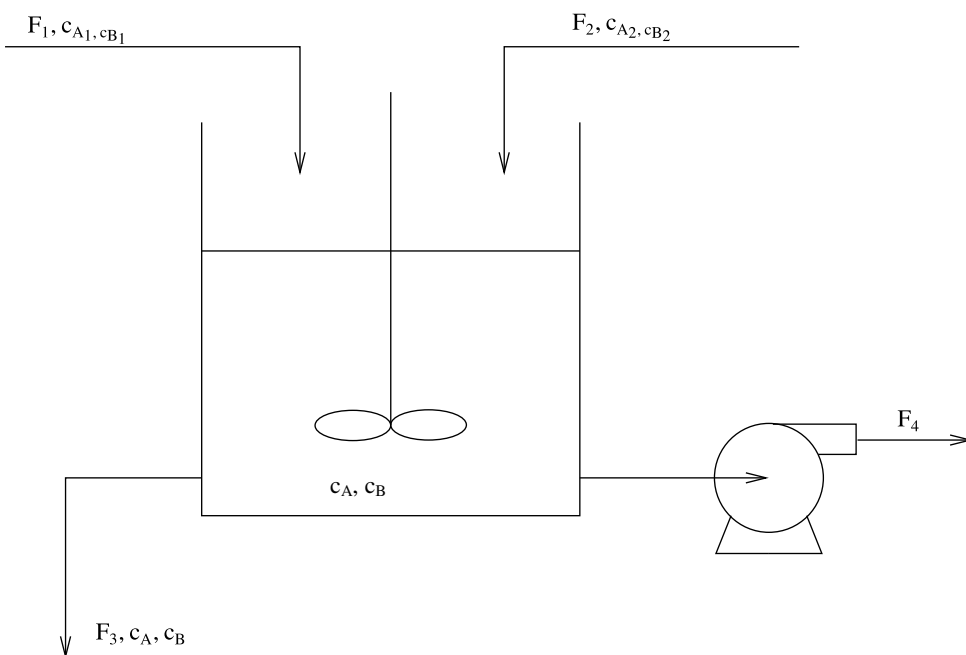
```
using Plots, LaTeXStrings
```

```
plot(y_t, 0, 3, lw=2, label=L"y(t)", xlabel=L"t", legend=:topleft)
plot!(t, 0, 3, label=L"t", lw=2)
```



Problema 4.4

En la figura siguiente se muestra un tanque agitado de mezcla, donde F_i son caudales volumétricos y c_i son concentraciones:

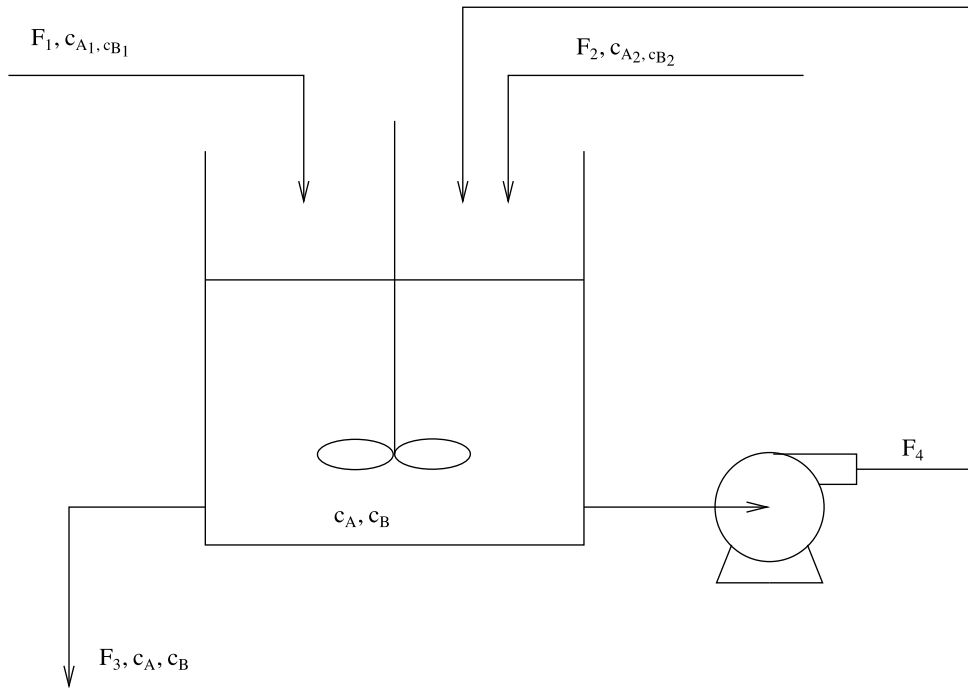


Asumiendo que todos los caudales de entrada y salida son constantes, pero que las concentraciones de las corrientes de entrada puede cambiar, contestar a las siguientes preguntas:

- Demostrar que la composición de la corriente de salida tiene un comportamiento de un sistema de primer orden para cambios en la composición de entrada.
- Encontrar las funciones de transferencia entre las composiciones de las corrientes de salida y las de entrada. Dibujar el diagrama de bloques correspondiente.
- Definir la ganancia y la constante de tiempo de este sistema.

Problema 4.5

Repetir el problema anterior con el siguiente tanque de mezcla:



5 Sistemas lineales de segundo orden

5.1 Definición de sistema de segundo orden

Un sistema de segundo orden es aquel cuya salida $y(t)$ puede ser descrita por una ecuación diferencial de segundo orden:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b f(t)$$

Si $a_0 \neq 0$:

$$\tau^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy}{dt} + y = K_p f(t)$$

donde $\tau^2 = \frac{a_2}{a_0}$, $2\zeta\tau = \frac{a_1}{a_0}$ y $K_p = \frac{b}{a_0}$.

Las nuevas constantes son:

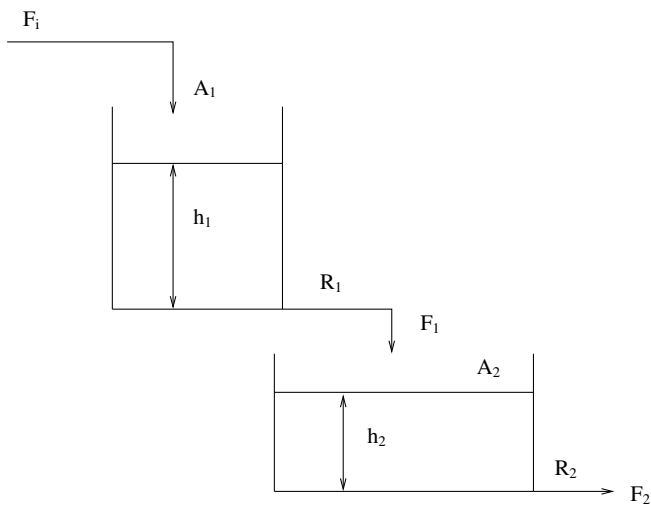
- τ es la constante de tiempo (o período natural del sistema)
- ζ es el coeficiente (o factor) de amortiguamiento
- K_p es la ganancia del proceso, tiene el mismo significado que para los sistemas de primer orden

Tomando variables de desviación y condiciones iniciales iguales a cero, la función de transferencia queda como:

$$G(s) = \frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

Los sistemas de segundo orden se pueden clasificar en tres categorías (Figura 5.1):

1. Sistemas inherentes de segundo orden. No son frecuentes en la industria, algunos ejemplos son los manómetros o las válvulas neumáticas.
2. Procesos consistentes en dos o más procesos de primer orden, en serie o en paralelo, por los que fluye materia o energía.
3. Un proceso con su controlador presenta una dinámica de segundo orden o de orden superior.



(a) Los dos depósitos en serie del [problema 3.6](#)



(b) Válvula neumática ([Fuente](#))



(c) Bioreactores con el panel de control ([Fuente](#))

Figura 5.1: Ejemplos de sistemas de segundo orden.

5.2 Respuesta a una entrada en escalón

La salida de un sistema de segundo orden a una entrada de tipo escalón es:

$$y(s) = \frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \frac{M}{s}$$

Para poder descomponer la respuesta en fracciones simples y poder obtener la respuesta en tiempo real hay que hallar las raíces del denominador:

$$s_1, s_2 = \frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$$

En función del valor del coeficiente de amortiguamiento se pueden plantear tres casos.

```
using SymPy, Plots, LaTeXStrings

@syms t::real Kp::real=>"K_p" M::real
@syms T::positive=>" " Z::positive=>" "
@syms s

iL(f) = sympy.inverse_laplace_transform(f, s, t)

G = Kp/(T^2*s^2+2*Z*T*s+1)
f = M/s

y = G*f

solve(denominator(y),s)
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} \\ \frac{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} \end{bmatrix}$$

5.3 Respuesta sobreamortiguada

Es la respuesta obtenida cuando $\zeta > 1$, las dos soluciones son reales. La salida con el tiempo es:

$$\frac{y(t)}{K_p M} = 1 - e^{-\zeta \frac{t}{\tau}} \left(\cosh \left(\sqrt{\zeta^2 - 1} \frac{t}{\tau} \right) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh \left(\sqrt{\zeta^2 - 1} \frac{t}{\tau} \right) \right)$$

En este caso la respuesta no presenta oscilaciones. Cuanto mayor es el coeficiente de amortiguamiento más amortiguada es la respuesta, el sistema necesita más tiempo para alcanzar el nuevo estado estacionario.

La ganancia K_p tiene el mismo sentido físico que para los sistemas de primer orden.

5.4 Respuesta críticamente amortiguada

Cuando solo hay una solución real (repetida), $\zeta = 1$:

$$\frac{y(t)}{K_p M} = 1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

5.5 Respuesta subamortiguada

Se obtiene cuando las soluciones son complejas (conjugadas, obviamente), para que eso se produzca $\zeta < 1$. La función respuesta obtenida es:

$$\frac{y(t)}{K_p M} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \frac{t}{\tau}} \sin \left(\sqrt{1 - \zeta^2} \frac{t}{\tau} + \operatorname{atan} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right)$$

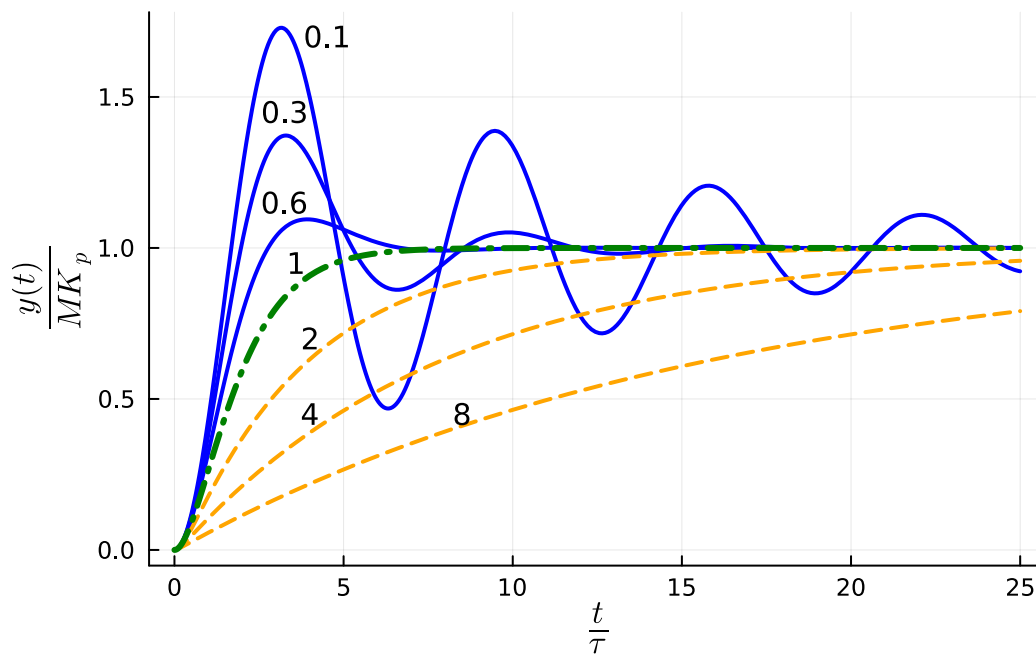


Figura 5.2: Respuesta de diferentes sistemas de segundo orden a un escalón unidad según su coeficiente de amortiguamiento.

La respuesta es oscilatoria y se pueden definir los siguientes parámetros característicos:

- **Sobrepaso** (*overshoot*):

$$\text{Sobrepaso} = \frac{A}{B} = \exp \left(\frac{-\pi \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right)$$

El sobrepaso se produce a:

$$t_{\text{sobrepaso}} = \frac{\pi \tau}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

El desarrollo del cálculo de estos parámetros se puede encontrar en Zywno (s. f.).

El sobrepaso aumenta al disminuir el coeficiente de amortiguamiento. Para el caso límite de que el coeficiente de amortiguamiento tienda a 1, el sobrepaso también tiende a 1.

- **Razón de disminución** (*decay ratio*):

$$\text{Razón de disminución} = \frac{C}{A} = \exp\left(\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = \text{sobrepaso}^2$$

- **Período de oscilación:**

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Si $\zeta = 0$, $T = 2\pi\tau$ es el período natural de oscilación.

- **Tiempo de respuesta** (*response time*): Un sistema subamortiguado alcanza su valor estacionario de manera oscilatoria cuando el tiempo se hace infinito. A efectos prácticos se toma como tiempo de respuesta el necesario para que la salida del sistema esté dentro del $\pm 5\%$ o del $\pm 2\%$ de la respuesta estacionaria y permanezca en ese intervalo. Estos tiempos se pueden calcular de manera aproximada con las siguientes fórmulas:

$$t_{\text{respuesta}(\pm 5\%)} = \frac{3\tau}{\zeta}$$

$$t_{\text{respuesta}(\pm 2\%)} = \frac{4\tau}{\zeta}$$

- **Tiempo de levantamiento** (*rise time*): De esta manera se caracteriza la velocidad con la que responde el sistema subamortiguado. Se define como el tiempo que tarda el sistema en alcanzar su valor estacionario por primera vez. Su valor es:

$$t_{\text{levantamiento}} = \frac{\tau(\pi - \cos^{-1}\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Es importante resaltar que cuanto menor es el coeficiente de amortiguamiento, menor es el tiempo de levantamiento, pero mayor es el sobrepaso.

5.6 Linealización

Habitualmente solo se tratan de manera analítica sistemas lineales de hasta segundo orden. Los sistemas lineales de orden superior o no lineales se acostumbran a estudiar recurriendo a la utilización de sistemas numéricos —como es, por ejemplo, la resolución de ecuaciones diferenciales por el método de Euler o de Runge-Kutta— o su simplificación a sistemas lineales mediante su linealización.

La linealización de un proceso es aproximar sistemas lineales a sistemas no lineales. Se utiliza ampliamente en el estudio de la dinámica de procesos y el diseño de sistemas de control por las siguientes razones:

1. Es posible encontrar soluciones analíticas a los sistemas lineales. Además se puede realizar estudios completos y generales del comportamiento de los sistemas lineales independientemente de los valores particulares de los parámetros y de las variables del sistema.
2. Todos los desarrollos significativos útiles, hasta hace unos pocos años, para el desarrollo efectivo de sistemas de control se ha limitado a procesos lineales.

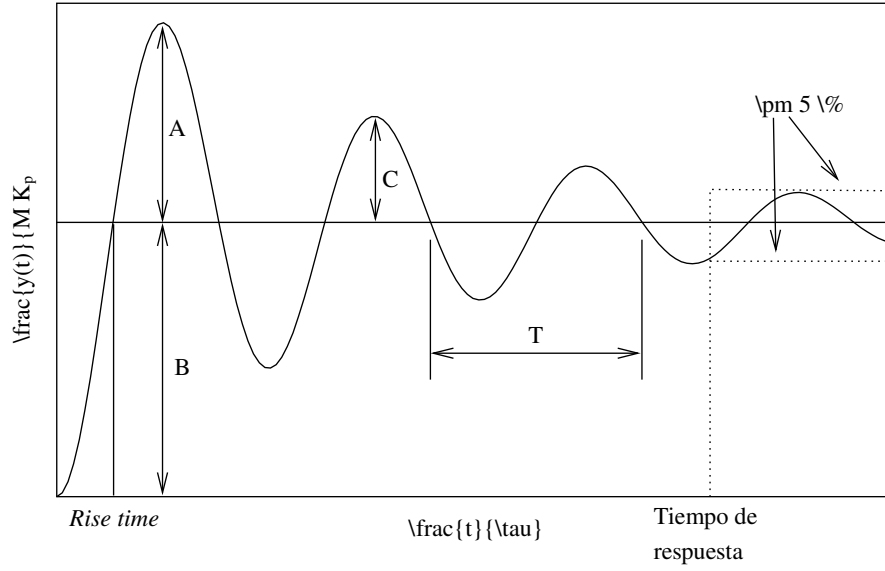


Figura 5.3: Representación gráfica de los parámetros que caracterizan la respuesta de un sistema de segundo orden subamortiguado.

Para llevar a cabo la linealización se recurre a desarrollos en serie de Taylor para una o más variables.

5.7 Retrasos

Uno de los elementos no lineales más habituales en los procesos alimentarios es la existencia de retrasos. En la Sección 7.5 se estudiará su influencia en el control de procesos.

Sea el siguiente proceso de primer orden con un retraso:

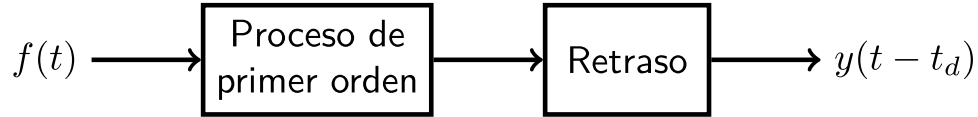


Figura 5.4: Diagrama de bloques de un proceso de primer orden con un retraso igual a t_d .

Para el sistema de primer orden:

$$G_p = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[f(t)]} = \frac{K_p}{\tau_p s + 1}$$

y para el retraso (Ecuación 3.6, propiedad *traslación de la transformada*, Sección 3.2):

$$\frac{\mathcal{L}[y(t - t_d)]}{\mathcal{L}[y(t)]} = e^{-t_d s}$$

donde t_d es el retraso o tiempo muerto.

Por tanto el proceso puede representarse como:

La función de transferencia global para el proceso de primer orden y el retraso será:

$$\frac{\mathcal{L}[y(t - t_d)]}{\mathcal{L}[f(t)]} = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} e^{-t_d s}$$

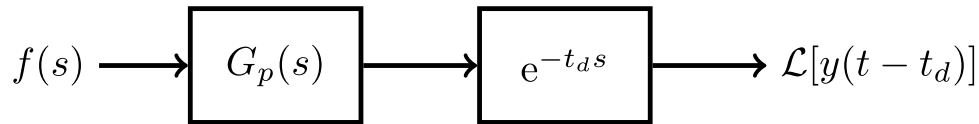


Figura 5.5: Diagrama de bloques de la figura anterior una vez realizadas las transformadas de Laplace.

El cálculo de la transformada inversa de Laplace es sencillo. En este caso lo vamos a realizar utilizando SymPy. En primer lugar, cargaremos las bibliotecas que vamos a utilizar, definiremos los símbolos necesarios y las funciones de transferencia del proceso (G_p) y del retraso (G_d). También calcularemos la función de transferencia G , resultado de plantear la serie de bloques formada por el proceso y por el retraso:

```
using SymPy, Plots, LaTeXStrings
```

```
@syms s t::real td::positive=>"t_d" K::real T::real=>"tau" M::real
```

```
Gp = K/(T*s+1)
```

```
Gd = exp(-td*s)
```

```
G = Gp*Gd
```

$$\frac{K e^{-s t_d}}{s \tau + 1}$$

La respuesta del proceso de primer orden $y(t)$ es:

```
y = sympy.inverse_laplace_transform(Gp*M/s, s, t)
```

$$KM \left(\theta(t) - e^{-\frac{t}{\tau}} \theta(t) \right)$$

La salida tras sufrir el retraso t_d es:

```
yd = sympy.inverse_laplace_transform(G*M/s, s, t)
```

$$KM \left(1 - e^{-\frac{t+t_d}{\tau}} \right) \theta(t - t_d)$$

El efecto del retraso es muy evidente al representar gráficamente ambas respuestas:

El retraso se puede simplificar matemáticamente mediante la [aproximación de Padé](#):

$$e^{-t_d s} \approx \frac{1 - \frac{t_d}{2} s}{1 + \frac{t_d}{2} s}$$

5.8 Problemas

Problema 5.1

Determinar la respuesta dinámica de un sistema de segundo orden sobreamortiguado y de un sistema subamortiguado a las siguientes entradas:

- impulso unidad
- pulso unidad de 5 minutos de duración
- $\sin(2t)$

Determinar la respuesta estacionaria resultante.

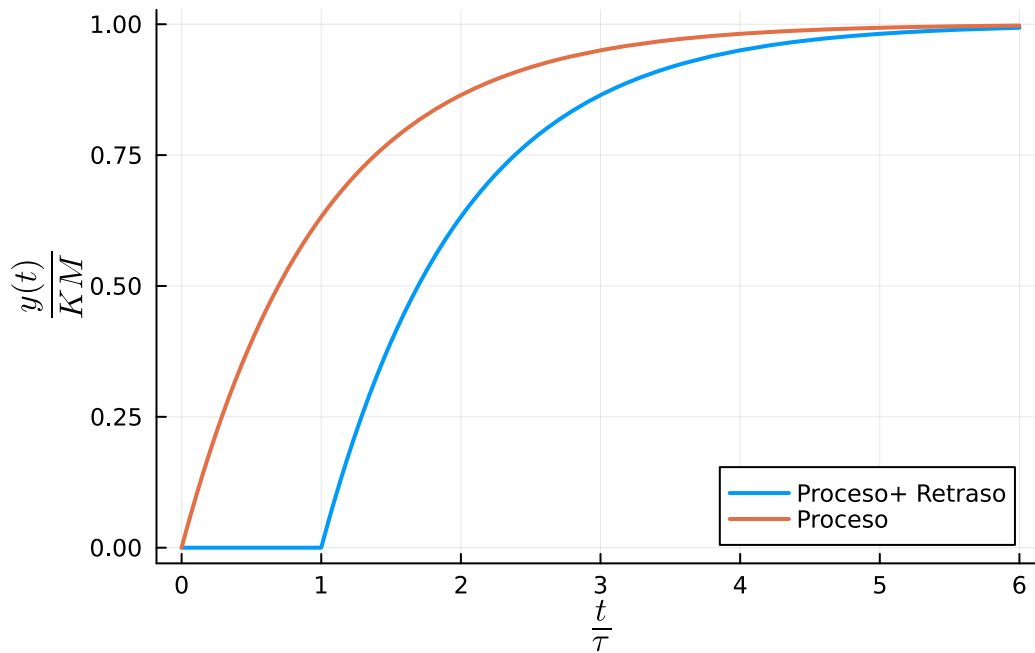


Figura 5.6: Efecto de un retraso $t_0 = 1$ sobre la respuesta de un sistema de primer orden con una entrada en escalón.

Problema 5.2

Sea la siguiente función de transferencia de segundo orden:

$$G(s) = \frac{y(s)}{m(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Se introduce un cambio en escalón de altura 5 en el sistema, calcular:

- el sobrepaso
- la razón de disminución
- el valor máximo de $y(t)$
- el tiempo de levantamiento
- el periodo de oscilación

Problema 5.3

Cuál de los siguientes sistemas de segundo orden es equivalente a dos sistemas de primer orden en serie y cuál no?

- $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 2}$
- $G(s) = \frac{1}{s^2 + 1.9s + 0.7}$
- $G(s) = \frac{1}{s^2 + 5}$
- $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 2}$

Problema 5.4

Sea un sistema de segundo orden con una entrada sinusoidal, $m(t) = 1 \sin(2t)$. Demostrar que la respuesta estacionaria es:

- una función sinusoidal,
- tiene una amplitud $\frac{1}{\sqrt{(1-t\tau^2)^2+(4\zeta\tau)^2}}$ y
- tiene como desfase $\varphi = \text{atan}\left(\frac{-4\zeta\tau}{1-4\tau^2}\right)$.

Solución

Este problema se puede resolver resolviendo directamente la ecuación diferencial o utilizando la función de transferencia de un sistema lineal de segundo orden.

Ecuación diferencial

La ecuación a resolver es:

$$\tau^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy}{dt} + y = 1 \sin 2t$$

Para resolver analíticamente la ecuación se puede recurrir a *Sympy*. Para resolver la ecuación diferencial se ha supuesto que:

$$y(t=0) = \frac{dy(t=0)}{dt} = 0$$

lo que es razonable asumiendo que se está trabajando con variables de desviación.

En el enunciado del problema no se dice si se trata de un sistema subamortiguado ($\zeta < 1$), críticamente amortiguado ($\zeta = 1$) o sobreamortiguado ($\zeta > 1$).

1. *Sistema sobreamortiguado*: La constante de tiempo τ y el coeficiente de amortiguamiento ζ son siempre positivas. Por tanto, si $\zeta > 1$ el producto $\tau^2(\zeta - 1)(\zeta + 1)$ será positivo. Resolviendo la ecuación:

using SymPy

```
@syms t::real T::real=>"tau" z::positive=>"zeta" s y()
```

```
D = Differential(t)
```

```
deq = T^2*D(D(y(t))) + 2*z*T*D(y(t)) + y(t) ~ sin(2*t)
```

```
ics = Dict(y(0)=>0, D(y)(0)=>0)
```

```
sol = rhs(dsolve(deq, y(t), ics=ics))
```

$$-\frac{4\tau^2 \sin(2t)}{16\tau^4 + 16\tau^2 \zeta^2 - 8\tau^2 + 1} - \frac{4\tau \zeta \cos(2t)}{16\tau^4 + 16\tau^2 \zeta^2 - 8\tau^2 + 1} + \left(-\frac{4\tau^3}{16\tau^4 \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + 16\tau^2 \zeta^2 \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} - 8\tau^2 \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}} - \frac{16\tau^4 \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + 16\tau^2 \zeta^2 \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} - 8\tau^2 \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}}{16\tau^4 \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + 16\tau^2 \zeta^2 \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} - 8\tau^2 \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}} + \frac{4\tau^3}{16\tau^4 \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + 16\tau^2 \zeta^2 \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} - 8\tau^2 \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}} + \frac{2\tau \zeta^2}{16\tau^4 \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + 16\tau^2 \zeta^2 \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} - 8\tau^2 \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}} + \frac{\sin(2t)}{16\tau^4 + 16\tau^2 \zeta^2 - 8\tau^2 + 1} \right)$$

La respuesta obtenida se puede dividir en dos partes diferenciadas, una transitoria y otra estacionaria. La parte transitoria de la respuesta es:

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{4\tau^3}{16\tau^4\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + 16\tau^2\zeta^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} - 8\tau^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}} \right. \\
& \quad - \frac{2\tau\zeta^2}{16\tau^4\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + 16\tau^2\zeta^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} - 8\tau^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}} \\
& \quad + \frac{2\tau\zeta\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}}{16\tau^4\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + 16\tau^2\zeta^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} - 8\tau^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}} \\
& \quad \left. + \frac{\tau}{16\tau^4\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + 16\tau^2\zeta^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} - 8\tau^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}} \right) e^{\frac{t(-\zeta-\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1})}{\tau}} \\
& + \left(\frac{4\tau^3}{16\tau^4\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + 16\tau^2\zeta^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} - 8\tau^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}} \right. \\
& \quad + \frac{2\tau\zeta^2}{16\tau^4\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + 16\tau^2\zeta^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} - 8\tau^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}} \\
& \quad + \frac{2\tau\zeta\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}}{16\tau^4\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + 16\tau^2\zeta^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} - 8\tau^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}} \\
& \quad \left. - \frac{\tau}{16\tau^4\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + 16\tau^2\zeta^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} - 8\tau^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} + \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}} \right) e^{\frac{t(-\zeta+\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1})}{\tau}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0
\end{aligned} \tag{5.1}$$

El cálculo de este límite parece muy complicado, pero, en realidad, es muy simple ya que aparecen términos de tipo $\exp(-t)$ que se anulan cuando el tiempo tiende a infinito.

La parte más importante es la porción estacionaria, ya que será la que marque la dinámica tras los instantes iniciales. Despreciando la parte transitoria se obtiene la siguiente respuesta:

$$\begin{aligned}
y(t) = & -\frac{4\tau\zeta \cos(2t)}{16\tau^4 + 16\tau^2\zeta^2 - 8\tau^2 + 1} \\
& + \left(-\frac{4\tau^2}{16\tau^4 + 16\tau^2\zeta^2 - 8\tau^2 + 1} + \frac{1}{16\tau^4 + 16\tau^2\zeta^2 - 8\tau^2 + 1} \right) \sin(2t) \tag{5.2}
\end{aligned}$$

Operando y aplicando la propiedad trigonométrica:

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha = z \sin(\alpha + \varphi)$$

donde $z^2 = x^2 + y^2$ y $\varphi = \text{atan}(y/x)$ y sabiendo que:

$$\begin{cases} x = -\frac{8\tau^2-2}{2(16\tau^2\zeta^2+16\tau^4-8\tau^2+1)} \\ y = \frac{4\tau\zeta}{16\tau^2\zeta^2+16\tau^4-8\tau^2+1} \end{cases}$$

se obtiene:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{16\tau^2\zeta^2 + 16\tau^4 - 8\tau^2 + 1}} \sin \left(2t + \text{atan} \left(-\frac{8\tau\zeta}{8\tau^2 - 2} \right) \right)$$

Se comprueba que se trata, tal como dice el problema, de:

i. Una función sinusoidal

ii. La amplitud es $\frac{1}{\sqrt{(1-4\tau^2)^2+(4\zeta\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{16\tau^2\zeta^2+16\tau^4-8\tau^2+1}}$

iii. El desfase es $\varphi = \text{atan}\left(-\frac{4\tau\zeta}{4\tau^2-1}\right)$

Función de transferencia

La función de transferencia del sistema propuesto por el problema es:

$$G = \frac{y(s)}{m(s)} = \frac{1}{\tau^2 s + 2\zeta\tau s + 1}$$

La entrada a este sistema es $m(t) = 1 \sin 2t$, realizando la transformada de Laplace

$$m(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

La respuesta del sistema será:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Gm(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\tau^2 s + 2\zeta\tau s + 1} \frac{2}{s^2 + 4}\right)$$

Realizando el cálculo para un sistema sobreamortiguado se obtiene:

$$G = 1/(T^2*s + 2*Z*T*s + 1)$$

$$m = 2/(s^2+4)$$

$$\text{sol_b} = \text{sympy.inverse_laplace_transform}(G*m, s, t)$$

$$2\left(\frac{(-\tau^2-2\tau\zeta)\cos(2t)}{4\tau^4+16\tau^3\zeta+16\tau^2\zeta^2+1} + \frac{\sin(2t)}{2\cdot(4\tau^4+16\tau^3\zeta+16\tau^2\zeta^2+1)}\right)\theta(t) + \frac{2(\tau^4+4\tau^3\zeta+4\tau^2\zeta^2)e^{-\frac{t(4\tau^4+16\tau^3\zeta+16\tau^2\zeta^2+1)}{4\tau^6+24\tau^5\zeta+48\tau^4\zeta^2+32\tau^3\zeta^3+\tau^2+2\tau\zeta}}}{4\tau^6+24\tau^5\zeta+48\tau^4\zeta^2+32\tau^3\zeta^3+\tau^2+2\tau\zeta}\theta(t)$$

$$\text{sol_b} = \text{simplify}(\text{sol})$$

$$\frac{\left(\tau\sqrt{\zeta^2-1}(-4\tau^2-2\zeta^2+2\zeta\sqrt{\zeta^2-1}+1)e^{\frac{t(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\sqrt{\zeta+1})}{\tau}}+\tau\sqrt{\zeta^2-1}\cdot(4\tau^2+2\zeta^2+2\zeta\sqrt{\zeta^2-1}-1)e^{\frac{t(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\sqrt{\zeta+1})}{\tau}}+(\zeta-1)(\zeta+1)(-4\tau^2\sin(2t)-4\tau\zeta\cos(2t)+\sin(2t))\right)}{(\zeta-1)(\zeta+1)(16\tau^4+16\tau^2\zeta^2-8\tau^2+1)}$$

$$\text{sol_b} = \text{collect}(\text{sol}, \sin(2t))$$

$$-\frac{4\tau\zeta\cos(2t)}{16\tau^4+16\tau^2\zeta^2-8\tau^2+1} + \left(-\frac{4\tau^2}{16\tau^4+16\tau^2\zeta^2-8\tau^2+1} + \frac{1}{16\tau^4+16\tau^2\zeta^2-8\tau^2+1}\right)\sin(2t) + \left(-\frac{4\tau^3}{16\tau^4\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}+16\tau^2\zeta^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}-8\tau^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}+\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}} - \frac{2\tau\zeta^2}{16\tau^4\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}+16\tau^2\zeta^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}-8\tau^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}+\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}} + \frac{4\tau^3}{16\tau^4\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}+16\tau^2\zeta^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}-8\tau^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}+\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}} + \frac{2\tau\zeta^2}{16\tau^4\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}+16\tau^2\zeta^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}-8\tau^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}+\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}} + \frac{1}{16\tau^4\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}+16\tau^2\zeta^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}-8\tau^2\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}+\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}}\right)$$

Con paciencia, se puede comprobar que se obtiene el mismo resultado que resolviendo la ecuación diferencial.

6 Acciones de control

6.1 Descripción de un bucle de control

Un bucle de control por retroalimentación se compone de un proceso, el sistema de medición de la variable controlada, el sistema de control y el elemento final de control. Cada uno de estos elementos tiene su propia dinámica, que vendrá descrita por una función de transferencia.

En este capítulo se explicará como se puede encontrar la función de transferencia de todo un lazo de control a partir de las funciones de transferencia de cada uno de los elementos del lazo. El medidor, el proceso y el elemento final de control serán habitualmente sistemas lineales de primer o de segundo orden, como los descritos en los dos capítulos anteriores. Las funciones de transferencia de los controladores se detallarán más adelante en este capítulo.

6.1.1 Componentes de un lazo de control

El sistema de control se compone del controlador y del punto suma, que compara la lectura del medidor con la consigna para dar el error ε que alimenta el controlador. El objetivo del sistema de control es minimizar el error para que su valor sea lo más próximo a cero. Además debe lograr eliminar los errores lo más rápidamente posible.

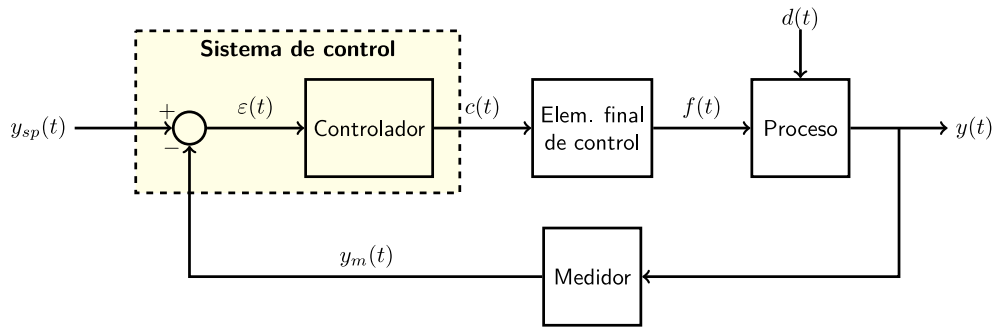


Figura 6.1: Diagrama de bloques de un lazo de control por retroalimentación.

En Sección 1.3 se describe cualitativamente un bucle de control por retroalimentación, un intercambiador de calor en una planta de pasteurización de leche. En este capítulo se describirá el bucle de una manera más detallada.

El proceso, en este caso el intercambiador de calor, viene descrito por la función de transferencia G_p . El proceso puede tener dos posibles entradas: $f(t)$ que es la variable manipulable y $d(t)$ que representa a las perturbaciones. Las perturbaciones pueden ser una entrada en cualquier punto del lazo de control, pero normalmente son debidas al proceso. La respuesta del proceso es la variable controlada que normalmente se indicará como $y(t)$. Esta variable es la respuesta global del sistema formado por todos los elementos del lazo de control.

El valor de la variable controlada se mide con un sensor, un termómetro de resistencia de tipo Pt100 para el ejemplo, cuya dinámica viene descrita por la función de transferencia G_m . Como salida de este proceso se obtiene la variable controlada medida $y_m(t)$.

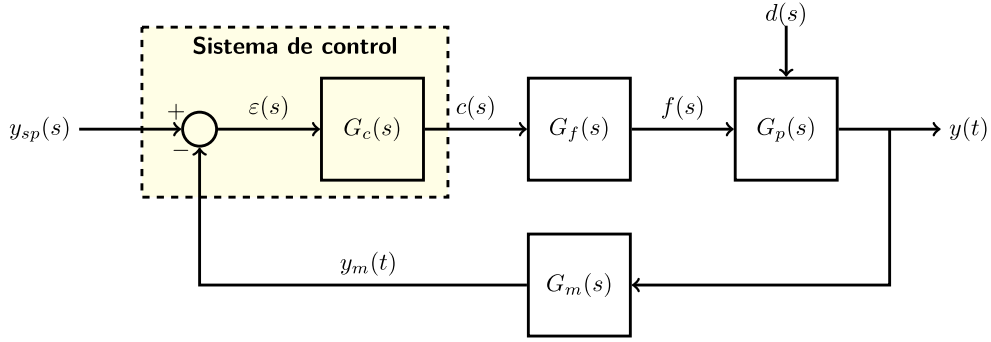


Figura 6.2: Funciones de transferencia que intervienen en un lazo de control por retroalimentación.

El valor de y_m se compara con la consigna $y_{sp}(t)$ para obtener el error $\varepsilon(t)$. El valor de la consigna será normalmente cero, en el caso de estar definido utilizando variables de desviación. Este error es la entrada del controlador, cuya función de transferencia es G_c . La respuesta del controlador $c(t)$ es una intensidad de corriente o una diferencia de presión según sea el sistema de transmisión de información eléctrico o neumático.

Esta acción de control $c(t)$ modifica al elemento final de control (G_f), en ejemplo tratado es una válvula, para que cambie el valor de la variable manipulable $f(t)$. El cambio de la variable manipulable modifica el estado del proceso. Si el sistema de control funciona correctamente este cambio de la variable controlada debe tender a eliminar el error. En el caso de que lo que se haya producido haya sido un cambio a la consigna, debe conducir al sistema al nuevo estado estacionario deseado.

6.1.2 Componentes de acción inversa

Aunque la mayoría de elementos del bucle de control son de acción directa –el signo de la salida es el mismo de la entrada–, también existen procesos de acción inversa. Los procesos de acción inversa tienen una ganancia negativa. Un elemento de acción inversa presente en todos los lazos de control es el comparador. En el comparador se produce un cambio de signo, ya que para calcular el error se resta la variable medida a la consigna (Figura 6.3). Por este motivo se puede considerar al comparador como un elemento de acción inversa.

Se puede demostrar de manera muy sencilla que para que un lazo de control pueda funcionar correctamente debe tener un número impar de elementos de acción inversa, es decir, un número impar de cambios de signo en el lazo de control. Si existe en el lazo de control un número par de elementos de acción inversa se debe incluir un bloque -1 entre el comparador y el controlador (Figura 6.4).

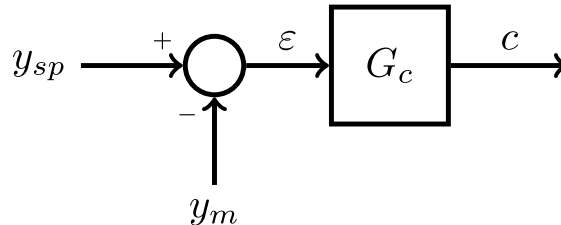


Figura 6.3: Disposición de sistema de control cuando el número de elementos de acción inversa en el lazo de control es impar.

En este curso los bloques y procesos utilizados solo tienen una entrada y una salida. En cambio el proceso en la Figura 6.2, el proceso tiene dos entradas, la variable manipulable y las perturbaciones. Para evitar ese problema habitualmente se considera que además del proceso existe una función de

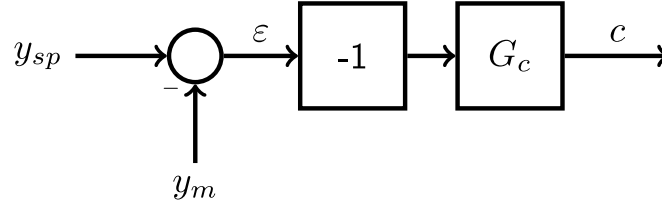


Figura 6.4: Disposición del sistema de control cuando cuando existe un elemento de acción inversa o su número es par.

transferencia debida a las perturbaciones (G_d) que no forma parte del lazo de control. Realizando esa modificación el lazo de control queda como el mostrado en la Figura 6.5.

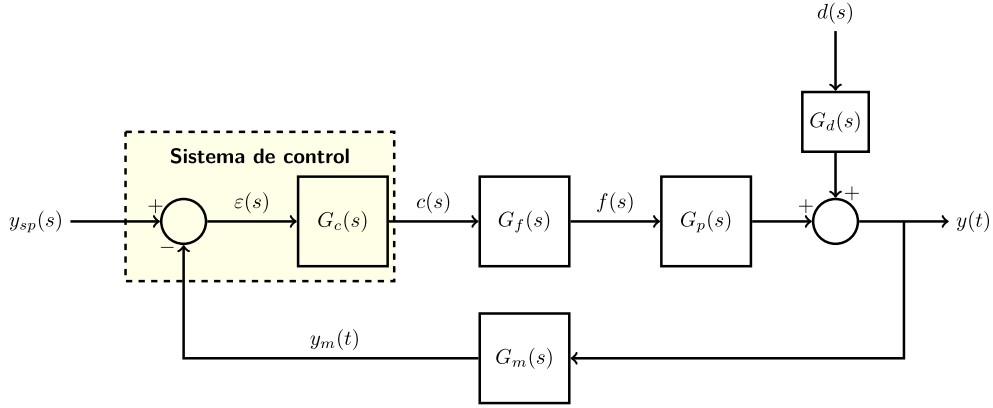


Figura 6.5: Lazo de control por retroalimentación mostrando la función de transferencia de las perturbaciones, $G_d(s)$.

6.1.3 Forma canónica

Con frecuencia los lazos de control se expresan de manera simplificada utilizando la forma canónica. Para ello es necesario tener en cuenta que G_c , G_f y G_p son tres funciones de transferencia en serie.

La función de transferencia entre la consigna y la salida es:

$$\frac{y(s)}{y_{sp}(s)} = \frac{G_c G_f G_p}{1 + G_c G_f G_p G_m}$$

La función de transferencia entre la perturbación y la salida es:

$$\frac{y(s)}{d(s)} = \frac{G_d}{1 + G_c G_f G_p G_m}$$

Por tanto la salida del lazo de control para un cambio simultáneo de la consigna y de la perturbación será:

$$y(s) = \frac{G_c G_f G_p}{1 + G_c G_f G_p G_m} y_{sp}(s) + \frac{G_d}{1 + G_c G_f G_p G_m} d(s)$$

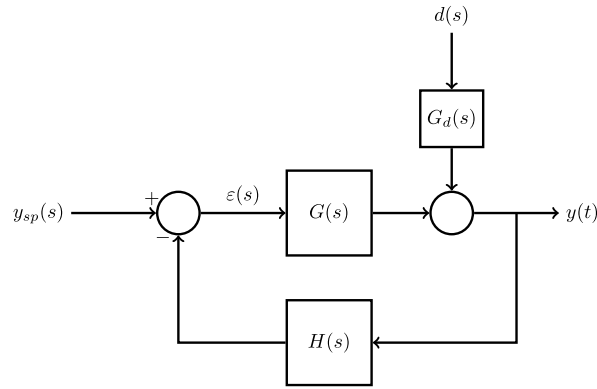


Figura 6.6: Forma canónica de un bucle de control por retroalimentación.

6.2 Control proporcional (P)

El acción de control c del controlador proporcional es:

$$c(t) = K_c \varepsilon(t) + c_s \quad (6.1)$$

donde K_c es la ganancia proporcional del controlador y c_s es el *bias* del controlador.

La ganancia del controlador también se puede expresar mediante la *Banda proporcional*, expresada como porcentaje:

$$\text{BP} = \frac{100}{K_c}$$

Normalmente, $1 \leq \text{BP} \leq 500$. La banda proporcional expresa el intervalo del error para que el control se sature. Cuanto mayor es K_c , menor es BP y mayor es la sensibilidad del controlador a los cambios o, lo que es lo mismo, al error ε .

El *bias* del controlador es el valor de la acción de control cuando el error es nulo.

La función de transferencia del controlador se obtiene realizando la transformada de Laplace a la Ecuación 6.1:

$$G_c(s) = K_c$$

teniendo en cuenta que se ha utilizado como variable de desviación:

$$c'(t) = c(t) - c_s$$

La acción de control proporcional es la más importante y se encuentra en todos los sistemas de control.

💡 Ejemplo

En el [problema 6.2](#) se muestra un ejemplo de controlador proporcional.

6.3 Control Proporcional + Integral (PI)

En este tipo de controlador la acción de control es:

$$c(t) = K_c \varepsilon(t) + \frac{K_c}{\tau_I} \int_0^t \varepsilon(t) dt + c_s$$

donde τ_I es el tiempo integral o tiempo de *reset*. Se suele expresar como minutos por repetición y se suele encontrar entre $0.1 \text{min} \leq \tau_I \leq 50 \text{min}$. También se puede expresar como $\frac{1}{\tau_I}$ (repeticiones por minuto) y se conoce como la velocidad de *reset*. K_c es la ganancia del controlador, tal como ocurría con el controlador proporcional. Al conjunto $\frac{K_c}{\tau_I}$, a veces, se le conoce como la ganancia integral K_I .

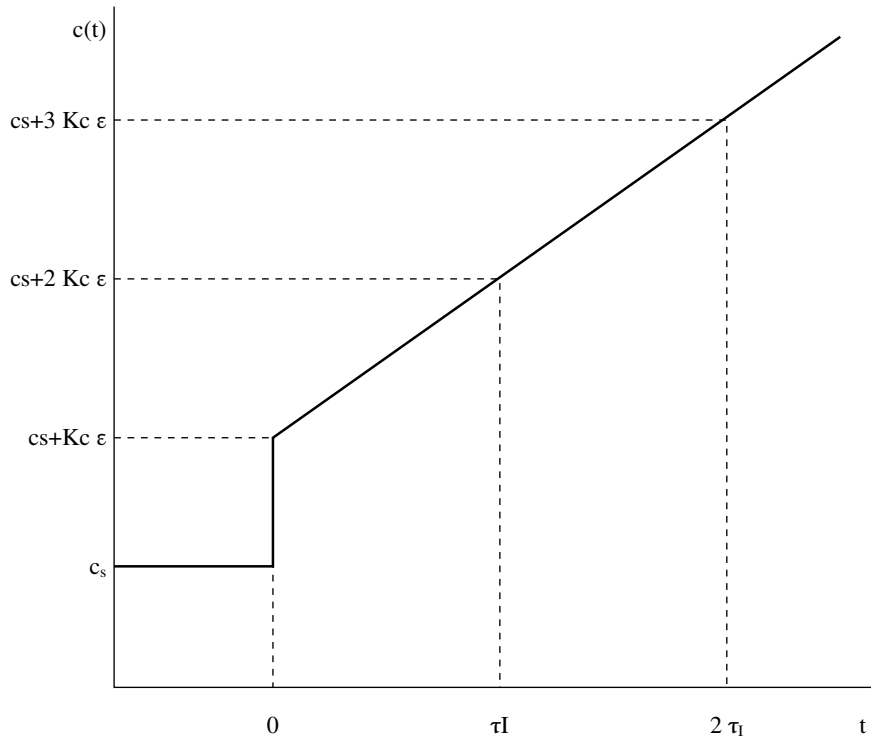


Figura 6.7: Acción de control (respuesta) de un controlador PI a un cambio en escalón en el error.

A τ_I se le conoce como el tiempo de *reset* porque es el tiempo necesario para que el controlador repita la acción de control inicial:

$$\frac{K_c}{\tau_I} \int_0^{\tau_I} \varepsilon dt = \frac{K_c}{\tau_I} \varepsilon \tau_I = K_c \varepsilon$$

para un error constante con el tiempo, como por ejemplo, el debido a un escalón.

La función de transferencia de este tipo de controladores es:

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right)$$

El controlador PI actúa mientras exista error en la salida produciendo cada vez valores mayores para la acción integral. Por tanto, se deben tomar acciones especiales para evitar saturaciones en los actuadores finales para errores persistentes con el tiempo.

💡 Ejemplo

Ver [Problema 6.4](#) con un controlador PI.

6.4 Control Proporcional + Derivativo (PD)

Se define como:

$$c(s) = K_c \varepsilon(t) + K_c \tau_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + c_s$$

donde τ_D es la constante de tiempo derivativa. La acción de control derivativa aplica una acción de control proporcional a la velocidad de cambio del error. En cierta manera se anticipa al error futuro, por ello se la conoce a veces como control anticipativo. En lugar de la constante de tiempo derivativa se utiliza a veces la ganancia derivativa K_D que es $K_c \tau_D$.

Presenta el problema de que puede tomar acciones de control derivativas intensas para sistemas con ruido pero con un error próximo a cero, lo que implica que la acción de control no es necesario. Este problema se puede solucionar añadiendo algún sistema de filtrado que elimine o minimice el ruido.

Su función de transferencia es:

$$G_c(s) = K_c(1 + \tau_D s)$$

💡 Ejemplo

Ver [problema 6.6](#) para un ejemplo de controlador PD.

6.5 Control Proporcional + Integral + Derivativo (PID)

Simplemente es la combinación de las tres acciones de control anteriores:

$$c(t) = K_c \varepsilon(t) + \frac{K_c}{\tau_I} \int_0^t \varepsilon(t) dt + K_c \tau_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + c_s$$

y su función de transferencia es:

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right)$$

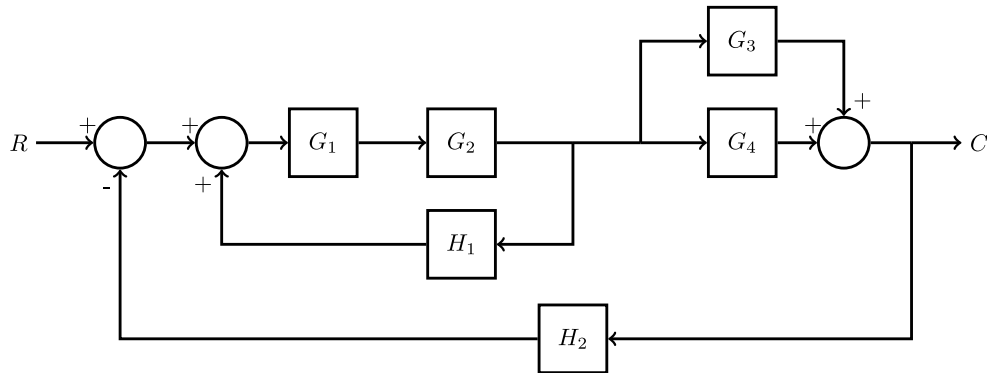
💡 Ejemplo

Un ejemplo de controlador PID se muestra en el [problema 6.5](#)

6.6 Problemas

Problema 6.1

Reducir el siguiente diagrama de bloques a la forma canónica:

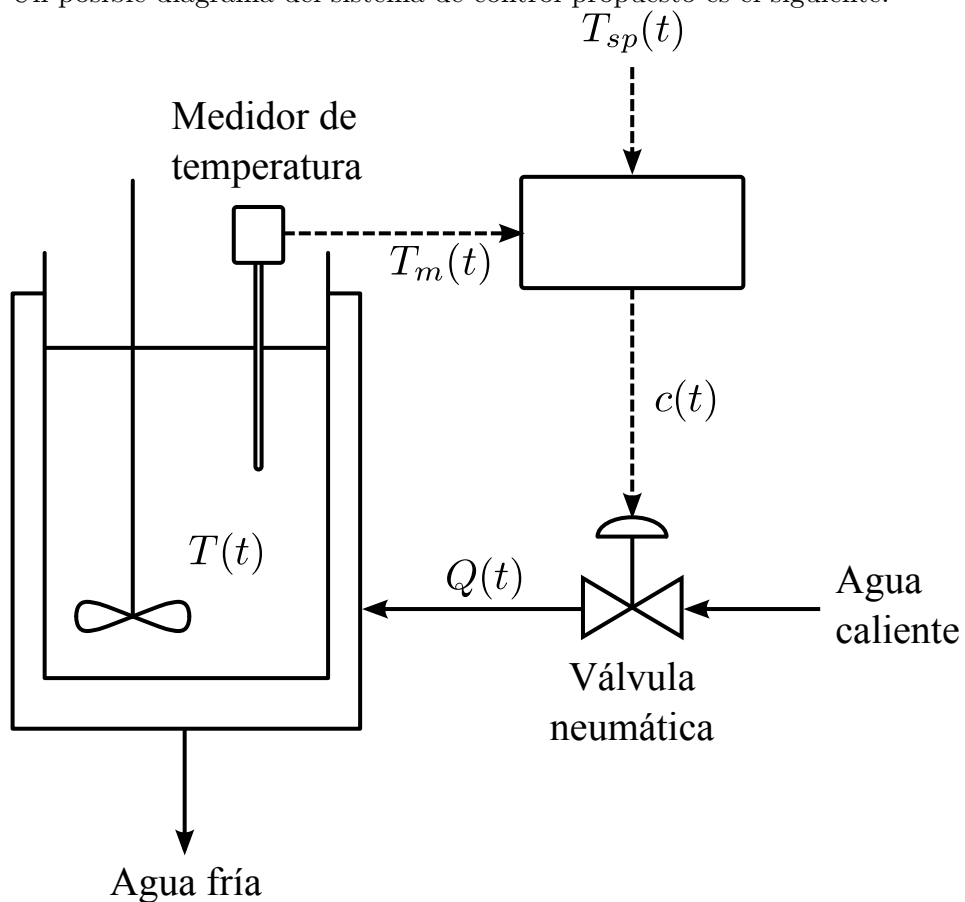


Problema 6.2

Determinar la ganancia y la banda proporcional de un controlador neumático proporcional de acción directa con una escala de 0-120 °C, si la variación en la salida pasa de 20 a 100 kPa cuando la temperatura aumenta desde 95 a °C. Si se cambia la banda proporcional a 50 %, determinar la ganancia y la variación de temperatura requerida para un cambio total en la salida.

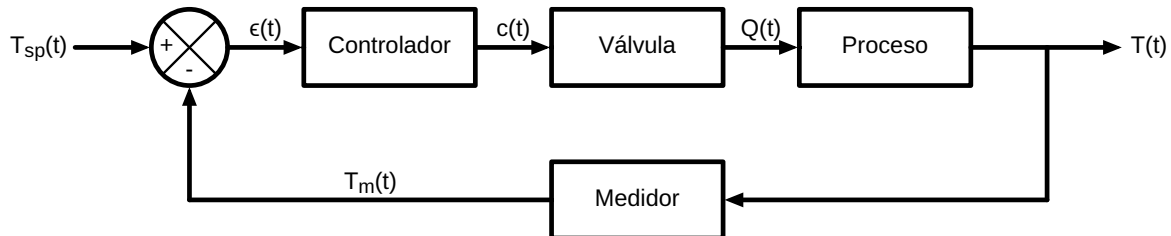
💡 Solución

Un posible diagrama del sistema de control propuesto es el siguiente:



La temperatura del tanque $T(t)$ la mide un sensor de temperatura. La respuesta de este medidor es $T_m(t)$, esta variable se alimenta al controlador que la compara con el valor de consigna $T_{sp}(t)$. La acción de control $c(t)$ se envía a la válvula neumática que modifica el caudal de agua caliente $Q(t)$. Al variar el caudal de agua caliente varía la temperatura del tanque. Si el sistema de control funciona correctamente la diferencia entre esta temperatura y la consigna debe ser cada vez menor, si no se producen cambios o perturbaciones.

Se puede plantear un diagrama de bloques que representa la instalación anterior:



El controlador es proporcional, lo que significa que:

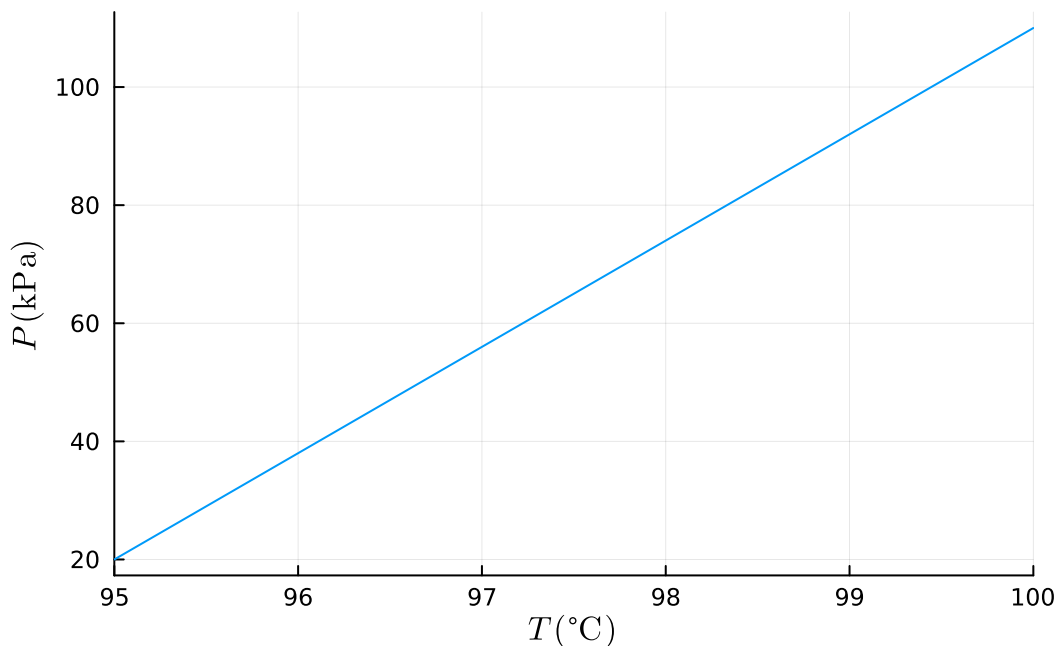
$$\text{Error: } \varepsilon(t) = T_{sp}(t) - T_m(t)$$

$$\text{Acción de control: } c(t) = K_c \varepsilon(t)$$

donde K_c es la ganancia del controlador. La ganancia del controlador será, por tanto, la pendiente de la recta siguiente:

using Plots

```
plot([95, 100], [20, 110], xlim=[95,100],
      xlabel=L"T\ \mathrm{({}^{\circ}\mathrm{C})}", ylabel=L"P\ \mathrm{(kPa)}",
      legend=false)
```



Lo que supone:

$$K_c = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}} = \frac{100 \text{ kPa} - 20 \text{ kPa}}{110 \text{ }^{\circ}\text{C} - 95 \text{ }^{\circ}\text{C}} = 5.33 \text{ kPa}/^{\circ}\text{C}$$

La banda proporcional (BP) es el porcentaje de uso del controlador. En este caso, aunque el controlador tiene capacidad de controlar temperaturas entre 0 y 120 °C se utiliza para controlar temperaturas entre 95 y 110 °C. Eso supone que:

$$BP = 100 \frac{110\text{ °C} - 95\text{ °C}}{120\text{ °C} - 0\text{ °C}} = 12.5\%$$

Si la banda proporcional es de 50%, el incremento de temperaturas controlado será:

$$\Delta T = \frac{BP}{100} 120\text{ °C} = 60\text{ °C}$$

Por tanto la ganancia del controlador será:

$$K_c = \frac{100\text{ kPa} - 20\text{ kPa}}{60\text{ °C}} = 0.133\text{ kPa/°C}$$

Problema 6.3

Un controlador neumático de acción directa, que opera en el intervalo de 3-15 psig para una escala de temperatura de 0 a 100 °C, está saturado para temperaturas inferiores a 30 °C y superiores a 90 °C. Determinar:

- La ganancia y la BP.
- La presión del aire a la salida del controlador cuando la temperatura sea de 70 °C.
- La τ_I de un controlador integral incorporado al proporcional, si al introducir el elemento medido en un medio a 70 °C (inicialmente a 30 °C) el controlador se satura en 10 minutos.

Solución

a.) En este caso el sistema controlador-elemento final de control tiene la capacidad de controlar cambios de temperatura entre 0 y 100 °C, pero se utiliza para controlar cambios entre 30 y 90 °C. Eso supone que no se utiliza toda la capacidad de control del sistema de control pero que se utiliza una ganancia proporcional del controlador más elevada, con las ventajas que eso puede suponer. La banda proporcional de este sistema es:

$$BP = \frac{90\text{ °C} - 30\text{ °C}}{100\text{ °C} - 0\text{ °C}} 100 = 60\%$$

La ganancia del controlador es:

$$K_c = \frac{15\text{ psig} - 3\text{ psig}}{90\text{ °C} - 30\text{ °C}} = 0.2\text{ psig/°C}$$

- b) La salida de un controlador proporcional es:

$$c(t) = K_c \varepsilon(t) + c_s$$

donde c_s es el *bias* del controlador, es decir, la salida del controlador cuando el error es nulo. En primer lugar hay que calcular el *bias* del controlador, para ello se va a suponer que en estado estacionario la temperatura es de 30 °C y que la salida del controlador es de 3 psig. Por tanto,

$$3\text{ psig} = K_c 0 + c_s \Rightarrow c_s = 3\text{ psig}$$

Si la temperatura es de 70 °C, el error será:

$$\varepsilon = 70\text{ }^{\circ}\text{C} - 30\text{ }^{\circ}\text{C} = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$$

Por tanto, la salida del controlador es:

$$c = (0.2\text{ psig}/^{\circ}\text{C})(40\text{ }^{\circ}\text{C}) + 3\text{ psig} = 11\text{ psig}$$

- c) Aquí se plantea un cambio en la temperatura en forma de escalón de altura $40\text{ }^{\circ}\text{C}$, lo que supone que $\$ = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Un controlador proporcional-integral (PI) responde a la siguiente dinámica:

$$c(t) = K_c \varepsilon + \frac{K_c}{\tau_I} \int_0^t \varepsilon dt + c_s$$

Se debe buscar qué constante de tiempo integral hace que el controlador se sature (que alcance uno de los valores límite de salida, en este caso, la máxima presión de salida) a los 10 minutos. Por tanto:

$$c(t = 10) = 15\text{ psig} = (0.2\text{ psig}/^{\circ}\text{C})(40\text{ }^{\circ}\text{C}) + \frac{0.2}{\tau_I} \int_0^{10} (40\text{ }^{\circ}\text{C}) dt + 3\text{ psig}$$

Resolviendo la ecuación anterior se encuentra que $\tau_I = 20\text{ min}$.

Problema 6.4

La temperatura de un proceso tiene un campo de variación de $200\text{ }^{\circ}\text{C}$. Para efectuar su control se dispone de dos opciones de controladores neumáticos que actúan sobre una válvula:

- Un controlador proporcional (3-15 psig) de BP = 50 %.
- Un controlador PI de BP = 50 % y $\tau_I = 1\text{ min}$.

El proceso en estado estacionario está a $60\text{ }^{\circ}\text{C}$, siendo la presión del controlador 3 psig. Si la temperatura aumenta bruscamente hasta $70\text{ }^{\circ}\text{C}$, calcular:

- La presión que actúa sobre la válvula en el control P.
- La presión que actúa sobre la válvula en el control PI.
- La influencia de la BP en el control PI.
- La influencia de la τ_I en el control PI.

Solución

Para ambos controladores la temperatura estacionaria es de $60\text{ }^{\circ}\text{C}$. En esas condiciones la salida del controlador es de 3 psig. Como consecuencia se tomarán $c_s = 3\text{ psig}$.

El cambio brusco de temperatura es un escalón de altura $10\text{ }^{\circ}\text{C}$:

$$\varepsilon = 70\text{ }^{\circ}\text{C} - 60\text{ }^{\circ}\text{C} = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$$

- a) Una banda proporcional de 50% implica que aunque el campo de variación del controlador sea de $200\text{ }^{\circ}\text{C}$ solo se controlarán variaciones de temperatura máximas de:

$$\text{BP} = 50\% = \frac{\Delta T}{200} 100 \Rightarrow \Delta T = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$$

Por tanto la ganancia proporcional es:

$$K_c = \frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{15 \text{ psig} - 3 \text{ psig}}{100 \text{ }^\circ\text{C}} = 0.12 \text{ psig/K}$$

La salida del controlador proporcional será:

$$c(t) = K_c \varepsilon(t) + c_s = (0.12 \text{ psig/K})(10 \text{ }^\circ\text{C}) + 3 \text{ psig} = 4.2 \text{ psig}$$

- b) La respuesta del controlador PI es (la ganancia proporcional es la misma que en el apartado anterior):

$$c(t) = K_c \varepsilon(t) + \frac{K_c}{\tau_I} \int_0^t \varepsilon(t) dt + c_s = K_c \varepsilon + \frac{K_c}{\tau_I} \varepsilon t + c_s = 4.2 \text{ psig} + (1.2 \text{ psig/min})t$$

A los 9 minutos el controlador se satura ($c = 15 \text{ psig}$). Pasados 9 minutos el sistema queda fuera de control.

- c) Al aumentar la banda proporcional, disminuye la ganancia proporcional. Esa disminución supone que la acción de control será menos intensa. La pendiente de la curva del apartado b) $\frac{K_c}{\tau_I} \varepsilon$ será menor, como consecuencia el sistema de control será más lento, tardará más tiempo en saturarse y en eliminar los errores del sistema.
- d) Si aumenta la constante de tiempo integral, la acción de control es menos intensa y más lenta ya que disminuye la pendiente $\frac{K_c}{\tau_I} \varepsilon$.

Problema 6.5

Un controlador P+I+D está en estado estacionario con una presión de salida de 9 psig. La consigna y el punto de registro están juntos inicialmente. En el tiempo $t = 0$, la consigna varía respecto al punto de registro a una velocidad de 0.5 in/min hacia lecturas más bajas. Si $K_c = 2 \text{ psig/in}$ de registro, $\tau_I = 1.25 \text{ min}$ y $\tau_D = 0.4 \text{ min}$, dibujar la presión de salida frente al tiempo.

Solución

La salida de un controlador PID es:

$$c(t) = K_c \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t \varepsilon(t) dt + \tau_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right) + c_s$$

En este problema:

$$K_c = 2 \text{ psig/in}$$

$$\tau_I = 1.25 \text{ min}$$

$$\tau_D = 0.4 \text{ min}$$

$$c(t = 0 \text{ min}) = 9 \text{ psig}$$

$$\varepsilon(t) = -0.5 \text{ in/min}$$

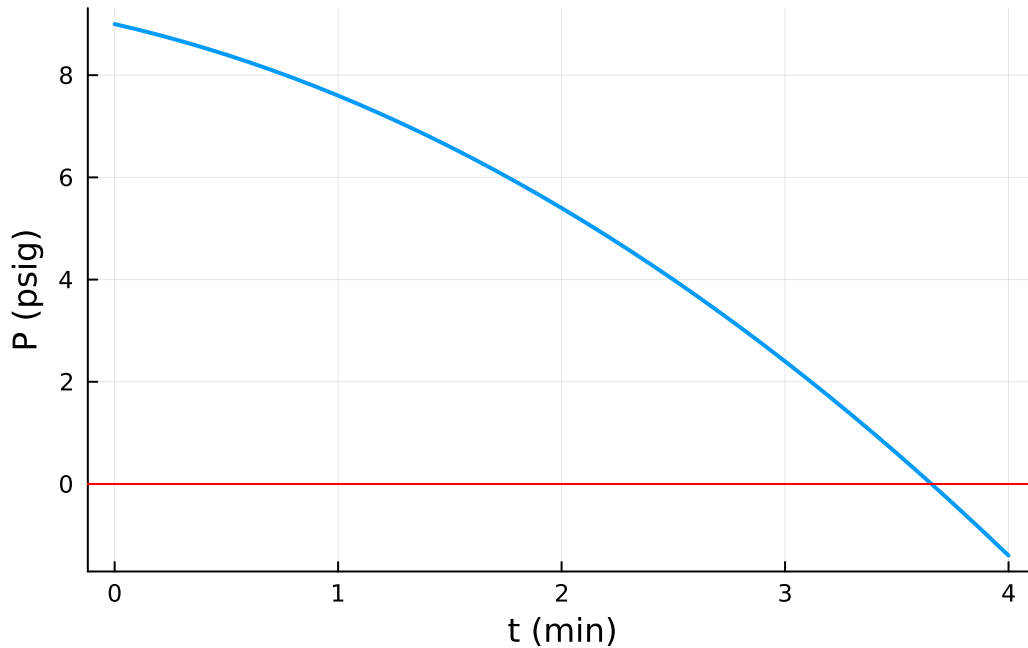
Sustituyendo:

$$c(t) = 2 \left(-0.5t + \frac{1}{1.25} \int_0^t -0.5t dt + 0.4 \frac{d(-0.5t)}{dt} \right) + c_s = -t - 0.8 \frac{t^2}{2} - 0.4 + c_s$$

El *bias* del controlador es $c_s = 9.4$ psig, ya que $c(t = 0 \text{ min}) = 9$ psig. Por tanto, la curva a representar es:

$$c(t) = 9 - t - 0.4t^2$$

```
using Plots
t = 0:0.1:4
plot(t, t -> 9-t-0.4t^2, lw=2, legend=false,
      xlabel="t (min)", ylabel="P (psig)")
hline!([0], lw=1, color="red")
```



Problema 6.6

Calcular la respuesta de un controlador PD a un cambio en el error en rampa de pendiente α . Dibujar las contribuciones de la acción derivativa y proporcional separadas. Discutir la naturaleza anticipativa de la acción de control derivativa a partir de esta gráfica.

Problema 6.7

Identificar los elementos físicos presentes en el sistema de control de temperatura de un fermentador.

Compararlos con los que se encontrarían en el sistema de control de temperatura de un horno. ¿Se observa alguna diferencia en la descripción matemática de estos sistemas?

7 Control por retroalimentación de sistemas lineales

En este capítulo se va a estudiar la dinámica de procesos controlados por retroalimentación. Se consideran los dos problemas más comunes:

1. un cambio deseado de la consigna y_{sp} , problema del servomecanismo
2. una perturbación o cambio en la carga d , problema de la regulación

7.1 Acción de control proporcional

En este caso se considera que $G_m = 1$, $G_f = 1$, $G_c = K_c$ y $G_d = K_d$, de manera que la respuesta del lazo de control será:

$$y = \frac{K_c G_p}{1 + K_c G_p} y_{sp} + \frac{K_d}{1 + K_c G_p} d \quad (7.1)$$

7.1.1 Procesos de primer orden

Para un proceso de primer orden sin sistema de control (lazo abierto, *open loop*):

$$\tau_p \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_p f(t) + K_d d(t)$$

con $y(0) = f(0) = d(0) = 0$, ya que se trata de variables de desviación. Realizando la transformada de Laplace de la ecuación diferencial anterior y operando se encuentra:

$$y(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} f(s) + \frac{K_d}{\tau_p s + 1} d(s)$$

Es decir:

$$\text{Para un cambio en la consigna: } G_p = \frac{K_p}{\tau_p s + 1}$$

$$\text{Para un cambio en la carga: } G_d = \frac{K_d}{\tau_p s + 1}$$

Sustituyendo en la Ecuación 7.1, salida de un bucle de retroalimentación (lazo cerrado, *closed loop*) y ordenando términos:

$$y = \frac{K'_p}{\tau'_p s + 1} y_{sp} + \frac{K'_d}{\tau'_p s + 1} d$$

donde $\tau_p' = \frac{\tau_p}{1+K_p K_c}$, $K_p' = \frac{K_p K_c}{1+K_p K_c}$ y $K_d' = \frac{K_d}{1+K_p K_c}$.

Se observa que:

1. El lazo de control es un sistema de primer orden, al igual que el proceso
2. La respuesta del lazo de control es más rápida que la del proceso ($\tau_p' < \tau_p$)
3. El sistema formado por el proceso y el bucle de retroalimentación es menos sensible a los cambios que el sistema formado solamente por el proceso en sí ya que $K_p' < K_p$ y $K_d' < K_d$

Si se considera un cambio en la consigna según un escalón unidad y no se produce perturbación alguna ($d = 0$), se puede apreciar mejor el efecto del controlador proporcional. En este caso se observa que la respuesta final obtenida por el lazo de control no es la exigida por la consigna. Esta discrepancia es el error permanente.

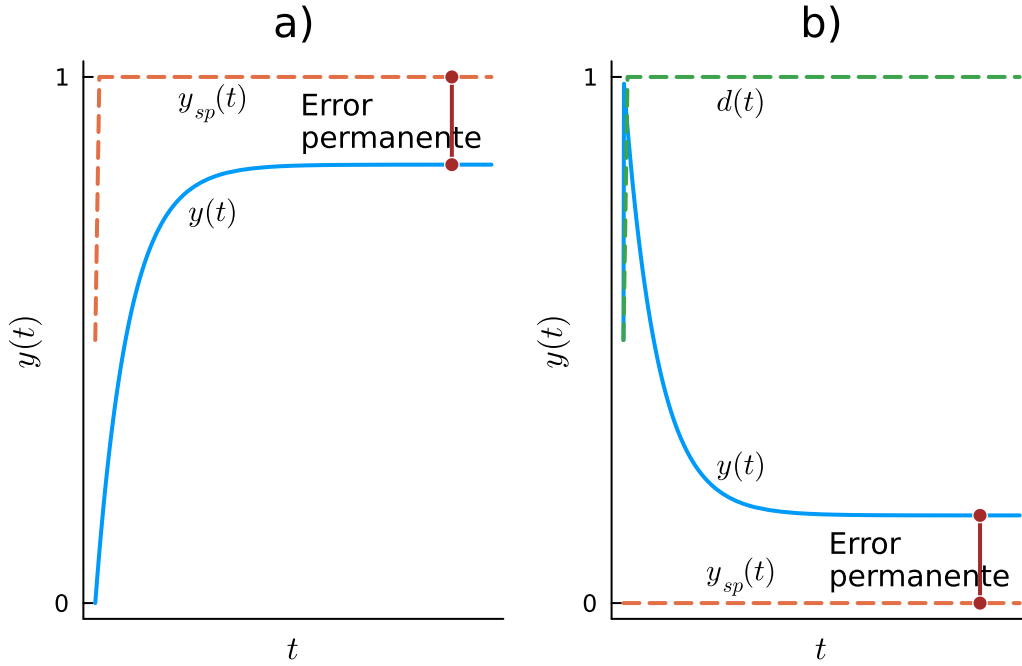


Figura 7.1: Respuestas de un lazo cerrado formado por un proceso de primer orden y un controlador P. Respuestas para un acambio en escalón unidad: a) en la consigna, b) en la carga.

Se define el **error permanente** (*offset*) como la diferencia entre el valor final de la consigna y el valor final de la respuesta:

$$\text{Error permanente} = \lim_{t \rightarrow \infty} (y_{sp} - y)$$

Aplicando el Teorema del valor final (Ecuación 3.7):

$$\text{Error permanente} = \lim_{s \rightarrow 0} (s y_{sp} - s y)$$

En este caso:

$$\text{Error permanente} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{1}{s} - s \frac{K_p'}{\tau_p' s + 1} \frac{1}{s} \right) = 1 - \frac{K_p K_c}{1 + K_p K_c} = \frac{1}{1 + K_p K_c}$$

Para el problema de la regulación ($d = \frac{1}{s}$ y $y_{sp} = 0$):

$$\text{Error permanente} = -\frac{K_d}{1 + K_p K_c}$$

Se observa en los dos caso que para eliminar el error permanente (error permanente $\rightarrow 0$), la ganancia del controlador debe hacerse muy elevada ($K_c \rightarrow \infty$). Por razones de estabilidad, que se verán más adelante, no es conveniente utilizar valores elevados de K_c para eliminar el error permanente.

Si el proceso es un integrador puro ($G_c = \frac{K_p}{s}$), como por ejemplo la dinámica del nivel de un depósito, se comprueba que un sistema de control P es capaz de mantener el nivel de líquido en el valor deseado dentro de un cierto margen. Si se calcula el error permanente de este tipo de sistemas (proceso más lazo de control) para una entrada en escalón, se obtiene el valor $-\frac{1}{K_c}$. Este valor puede ser aceptable para valores suficientemente elevados de K_c .

7.1.2 Procesos de 2º orden

Se considera un lazo de control como el del caso anterior pero en el que se ha sustituido el proceso por un sistema de segundo orden. Si se realiza un cambio en la consigna, la respuesta queda como:

$$y = \frac{K'_p}{\tau'^2 s^2 + 2\zeta'\tau' s + 1} y_{sp}$$

donde $\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1+K_p K_c}}$, $\zeta' = \frac{\zeta}{\sqrt{1+K_p K_c}}$ y $K_p = \frac{K_p K_c}{1+K_p K_c}$.

Se cumple que:

1. El lazo de control continua siendo un sistema de segundo orden.
2. $K'_p < K_p$, $\tau' < \tau$ y $\zeta' < \zeta$.
3. Para una entrada en escalón unidad, error permanente $= \frac{1}{1+K_p K_c}$. De nuevo, el error permanente tiende a 0, cuando la ganancia proporcional del controlador tiende a infinito.
4. Dependiendo de ζ , ζ' puede ser menor, mayor o igual a 1. Si la respuesta es sobreamortiguada, la velocidad de la respuesta es más lenta. Por tanto es preferible aumentar K_c para lograr una respuesta subamortiguada. De esta manera se logra una respuesta más rápida y con un error permanente menor. El problema es que al aumentar K_c aumenta el sobrepaso—lo que implica un aumento en la razón de disminución—y decrece el periodo de oscilación.

7.2 Acción de control integral

El efecto de la acción integral ($G_c = K_c \frac{1}{\tau_I s}$) sobre un lazo de control formado por un proceso de primer orden (el mismo caso que en el apartado anterior) para un cambio en la consigna será:

$$y(s) = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} = \frac{K_c \frac{1}{\tau_I s} \frac{K_p}{\tau_p s + 1}}{1 + K_c \frac{1}{\tau_I s} \frac{K_p}{\tau_p s + 1}} y_{sp}(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1} y_{sp}(s)$$

siendo $\tau = \sqrt{\frac{\tau_I \tau_p}{K_p K_c}}$ y $\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_I}{\tau_p K_p K_c}}$.

Se observa que el lazo de control formado por el proceso de primer orden y la acción integral es un sistema de segundo orden.

En este caso, para un cambio en escalón unidad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s) s \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1} \frac{1}{s} = 1$$

Por tanto, el error permanente será igual a 0. La acción de control integral elimina el error permanente.

Si se aumenta la ganancia del controlador K_c o se disminuye el tiempo integral τ_I , disminuye el coeficiente de amortiguamiento ζ . Con el objetivo de eliminar lo más rápidamente posible las perturbaciones o alcanzar el nuevo valor de la consigna, se prefiere trabajar normalmente con coeficientes de amortiguamiento menores que 1. Se logra aumentar la velocidad de la respuesta a expensas de tener desviaciones mayores a corto plazo, aparición de sobrepaso, y oscilaciones durante un tiempo mayor.

7.3 Acción de control derivativa

Considerando el mismo lazo de control que en los apartados anteriores con una acción de control derivativa ($G_c = K_c \tau_D s$), se obtiene:

$$y(s) = \frac{K_p K_c \tau_p s}{(\tau_p + K_p K_c \tau_D)s + 1} y_{sp}(s)$$

La acción de control derivativa no cambia el orden de la dinámica del sistema. La respuesta del sistema se hace más lenta ya que $\tau_p + K_p K_c \tau_D > \tau_p$.

Para un proceso de segundo orden:

$$y(s) = \frac{K_p K_c \tau_D s}{\tau^2 s^2 + (2\zeta\tau + K_p K_c \tau_D)s + 1} y_{sp}(s)$$

Tampoco cambia el orden de la dinámica del sistema. Además el lazo tiene una respuesta más amortiguada ya que $2\zeta\tau + K_p K_c \tau_D > 2\zeta\tau$.

Al disminuir la velocidad de la respuesta y aumentar el amortiguamiento se dice que la acción de control derivativa produce un comportamiento más robusto del sistema controlado.

7.4 Acciones de control combinadas

7.4.1 Acción de control PI

1. Aumenta el orden de la respuesta (efecto de la acción I)
2. Se elimina el error permanente (acción I)
3. Al aumentar la ganancia del controlador, la respuesta se hace más rápida (acción P y I), más oscilatoria, aumenta el sobrepaso y la razón de disminución (acción I). Valores elevados de K_c pueden hacer al lazo de control inestable
4. Al disminuir el tiempo integral, para una ganancia del controlador constante, la respuesta se hace más rápida y más oscilatoria, con mayor sobrepaso y razón de disminución (acción I)

7.4.2 Acción de control PID

La acción derivativa mantiene los beneficios de la acción PI y logra eliminar parte de los defectos. En un controlador PI al aumentar K_c , para lograr una respuesta más rápida, la respuesta se vuelve oscilatoria y puede llegar a ser inestable. La introducción de la acción derivativa tiene un efecto estabilizador. Al aumentar K_c se logra una respuesta más rápida manteniendo el sobrepaso prácticamente constante.

7.5 Influencia de los retrasos

Para todos los sistemas considerados en los apartados anteriores se ha supuesto que cualquier cambio en la entrada se reflejaba instantáneamente en la salida. Este hecho contradice la evidencia física, prácticamente todo proceso lleva un retraso entre la entrada y la salida. Normalmente este retraso es despreciable excepto en los casos siguientes que presentan retrasos elevados:

- Procesos en los que haya transporte de fluidos a largas distancias o que incluyan fenómenos con periodos largos de incubación
- Dispositivos de medida que requieran tiempos de muestreo o de análisis elevados. Por ejemplo, cromatografía de gases
- Elementos finales de control que necesiten un cierto tiempo para actuar
- Un controlador humano que necesita tiempo para pensar y tomar una decisión

Los bucles de control por retroalimentación que presentan alguno de estos elementos tienen los siguientes problemas:

- Una perturbación que entre en el proceso no será detectada hasta que haya pasado una cantidad de tiempo significativa
- La acción de control se realizará a partir de la última medida tomada que será inadecuada debido a que no representa correctamente lo que está ocurriendo en el proceso
- No se puede apreciar la acción de control sobre el sistema hasta un cierto tiempo después
- Como resultado de la combinación de los factores anteriores la presencia de tiempos muertos (retrasos) es una fuente de inestabilidad de los lazos de control

Los procesos con retraso son difíciles de controlar ya que la salida no contiene la información de lo que está ocurriendo en el proceso en este momento.

7.6 Introducción al diseño de sistemas de control por retroalimentación

Una vez decidido qué se va a controlar (variable controlada) y a través de qué (variable manipulable) es necesario llevar a cabo el diseño del controlador. Para ello hay que contestar fundamentalmente a las siguientes preguntas:

1. *Qué criterio de rendimiento se debe tomar para llevar a cabo la selección y la sintonía del controlador?*

Existen multitud de criterios para la evaluación del controlador. Por ejemplo:

- Mantener la máxima desviación lo menor posible
- Lograr tiempos de ajuste cortos
- Minimizar la integral de los errores hasta que el proceso alcanza el *set point* deseado

- Criterio de la razón de disminución 1/4

2. *Qué tipo de controlador se debe seleccionar para el proceso a controlar?*

De manera cualitativa se pueden considerar las siguientes conclusiones:

I. Control proporcional

1. Acelera la respuesta del proceso controlado
2. Produce error permanente para todos los procesos excepto para aquellos con términos $\frac{1}{s}$ en su función de transferencia

II. Control integral

1. Elimina el error permanente
2. La eliminación del error permanente causa normalmente unas desviaciones máximas mayores
3. Ralentiza el sistema o produce respuestas oscilantes
4. Si se aumenta K_c para aumentar la velocidad de la respuesta, el sistema aumenta las oscilaciones y puede pasar a ser inestable

III. Control derivativo

1. Se anticipa a los errores futuros e introduce la acción de control adecuada
2. Introduce un efecto estabilizador en la respuesta de ciclo cerrado de los procesos

Como consecuencia se pueden aplicar los siguientes criterios:

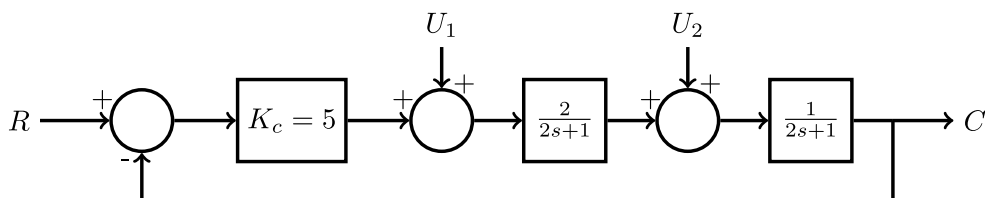
- i. Si es posible, utilizar un controlador P. Por ejemplo, sistemas de control de presión de gases o nivel de líquidos
 - ii. Si el controlador P es inaceptable, utilizar un PI. Se utiliza casi siempre para el control de caudales
 - iii. Utilizar un PID para aumentar la velocidad de la respuesta de ciclo cerrado y mantener la estabilidad. P.ej., control de temperatura y concentraciones
3. *Cómo se pueden seleccionar los mejores valores a los parámetros del controlador (sintonía del controlador)?*

Esta pregunta se contestará en los capítulos siguientes.

7.7 Problemas

Problema 7.1

La localización de un cambio de carga en un lazo de control puede afectar a la respuesta del sistema. En el diagrama de bloques adjunto se produce un cambio en escalón unidad en la posición 1 ó 2.



- a. ¿Cuál es la frecuencia del estado transitorio si la variación se produce en la posición 1? ¿Y si es en la 2?
- b. ¿Cuánto valdrá el error permanente en cada caso? Suponer un escalón unidad.

💡 Solución

- a) Para poder encontrar la frecuencia del estado transitorio será necesario conocer el coeficiente de amortiguamiento de este lazo de control.

Entrada en U_1

Para poder encontrar ζ es necesario calcular, en primer lugar, la función de transferencia que describe la dinámica del lazo de control para una entrada de perturbaciones en U_1 . La función de transferencia será:

$$\frac{C}{U_1} = \frac{\frac{2}{2s+1} \frac{1}{2s+1}}{1 + K_c \frac{2}{2s+1} \frac{1}{2s+1}}$$

En el numerador aparecen las funciones de transferencia existentes entre la entrada (U_1) y la salida (C). El denominador es 1 más el producto de las funciones de transferencia del lazo de control.

Operando se encuentra que:

$$\frac{C}{U_1} = \frac{\frac{2}{11}}{\frac{4}{11}s^2 + \frac{4}{11}s + 1}$$

Es importante resaltar que el término independiente del denominador debe ser 1.

Como era de esperar la función de transferencia es la de un sistema de segundo orden. Por tanto:

$$\begin{cases} \tau^2 = \frac{4}{11} \\ 2\tau\zeta = \frac{4}{11} \end{cases}$$

Operando se encuentran las siguientes soluciones:

$$\left[\left[\tau = -\frac{2\sqrt{11}}{11}, \zeta = -\frac{1}{\sqrt{11}} \right], \left[\tau = \frac{2\sqrt{11}}{11}, \zeta = \frac{1}{\sqrt{11}} \right] \right]$$

La constante de tiempo de un sistema y el coeficiente de amortiguamiento de un sistema deben ser siempre positivos. Por tanto el coeficiente de amortiguamiento toma el valor de $\frac{1}{\sqrt{11}}$.

La frecuencia del estado transitorio es:

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{2\pi\tau}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$\nu = 0.252$$

Entrada en U_2

En este caso la función de transferencia es:

$$\frac{C}{U_2} = \frac{\frac{1}{2s+1}}{1 + K_c \frac{2}{2s+1} \frac{1}{2s+1}} = \frac{\frac{2}{11}s + \frac{1}{11}}{\frac{4}{11}s^2 + \frac{4}{11}s + 1}$$

El denominador obtenido es el mismo que en el caso anterior, lo que significa que el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia serán iguales.

Se comprueba que lo que marca la respuesta de un lazo de control es el denominador de la función de transferencia. El numerador influye principalmente en términos transitorios cuya influencia sobre la dinámica del sistema disminuye rápidamente.

b) En ambos casos el error permanente valdrá:

$$\text{Error permanente} = \lim_{t \rightarrow \infty} [R(t) - C(t)]$$

Realizando la transformada de Laplace y aplicando el teorema del valor final se obtiene:

$$\text{Error permanente} = \lim_{s \rightarrow 0} [sR(s) - sC(s)]$$

En este problema la consigna no cambia, lo que significa que $R(s) = 0$.

Entrada en U_1

Se realiza un cambio en escalón unidad, la respuesta del lazo de control será:

$$C = \frac{\frac{2}{11}}{\frac{4}{11}s^2 + \frac{4}{11}s + 1} U_1 = \frac{\frac{2}{11}}{\frac{4}{11}s^2 + \frac{4}{11}s + 1} \frac{1}{s}$$

El error permanente será:

$$\text{Error permanente} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[0 - s \frac{\frac{2}{11}}{\frac{4}{11}s^2 + \frac{4}{11}s + 1} \frac{1}{s} \right] = -\frac{2}{11}$$

Entrada en U_2

La respuesta del lazo de control en este caso es:

$$C = \frac{\frac{2}{11}s + \frac{1}{11}}{\frac{4}{11}s^2 + \frac{4}{11}s + 1} U_2 = \frac{\frac{2}{11}s + \frac{1}{11}}{\frac{4}{11}s^2 + \frac{4}{11}s + 1} \frac{1}{s}$$

El error permanente es:

$$\text{Error permanente} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[0 - s \frac{\frac{2}{11}s + \frac{1}{11}}{\frac{4}{11}s^2 + \frac{4}{11}s + 1} \frac{1}{s} \right] = -\frac{1}{11}$$

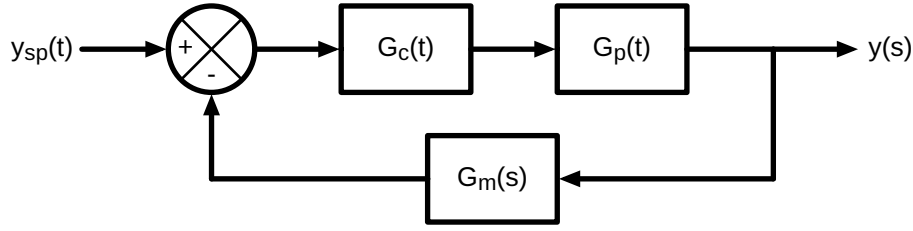
Problema 7.2

Para controlar un sistema de primer orden se utiliza un controlador PD con un elemento de medida cuya dinámica también es de primer orden.

- Determinar las expresiones de la constante de tiempo y el coeficiente de amortiguamiento para el sistema de lazo cerrado
- Si $p = 1$ min y $m = 10$ s, calcular K_c para que el coeficiente de amortiguamiento sea 0.7 en los siguientes supuestos: (1) $d = 0$ y (2) $d = 3$ s.
- Comparar, para las dos situaciones del apartado b) el error permanente y el periodo, y comentar la ventaja que representa la adición de la acción derivativa

Solución

- El lazo de control propuesto es:



donde:

$$G_c = K_c(1 + \tau_D s)$$

$$G_p = \frac{K_p}{\tau_p s + 1}$$

$$G_m = \frac{K_m}{\tau_m s + 1}$$

La función de transferencia que relaciona la respuesta dinámica del bucle de control con un cambio en la consigna es:

$$\frac{y}{y_{sp}} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p G_m} = \frac{\frac{K_c K_p \tau_D \tau_m}{K_c K_m K_p + 1} s^2 + \frac{(\tau_m + \tau_D) K_c K_p \tau_D}{K_c K_m K_p + 1} s + \frac{K_c K_p}{K_c K_m K_p + 1}}{\frac{\tau_p \tau_m}{K_c K_m K_p + 1} s^2 + \frac{\tau_p + \tau_m + K_c K_m K_p \tau_D}{K_c K_m K_p + 1} s + 1}$$

Al tratarse de una función de transferencia de segundo orden:

$$\tau^2 = \frac{\tau_p \tau_m}{K_c K_m K_p + 1}$$

$$2\tau\zeta = \frac{\tau_p + \tau_m + K_c K_m K_p \tau_D}{K_c K_m K_p + 1}$$

Despejando se encuentra:

$$\tau = \sqrt{\frac{\tau_p \tau_m}{K_c K_m K_p + 1}}$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_c K_m K_p + 1}{\tau_p \tau_m} \frac{\tau_p + \tau_m + K_c K_m K_p \tau_D}{K_c K_m K_p + 1}}$$

b) Si $\tau_p = 1 \text{ min} = 60s$ y $\tau_m = 10s$, qué valores debe tomar K_c para que $\zeta = 0.7$?

Caso $\tau_D = 0$:

Sustituyendo en la expresión del coeficiente de amortiguamiento:

$$0.7 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + K_c K_p K_m}{600} \frac{70}{1 + K_c K_p K_m}}$$

Por tanto:

$$K_c = \frac{3.167}{K_p K_m}$$

Caso $\tau_D = 3s$:

En este caso al sustituir en la ecuación del coeficiente de amortiguamiento se obtiene:

$$0.7 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + K_c K_p K_m}{600} \frac{70 + 3K_c K_p K_m}{1 + K_c K_p K_m}}$$

Tomando $K = K_c K_p K_m$ y operando se obtiene:

$$34.29 = \sqrt{1+K} \frac{70+3K}{1+K}$$

Para resolver la ecuación hay que elevarla al cuadrado:

$$34.29^2 = (1+K) \frac{(70+3K)^2}{(1+K)^2}$$

Operando se encuentra:

$$9K^2 - 756K + 3724 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$K = \begin{cases} 78.745 \\ 5.255 \end{cases}$$

Es decir:

$$K = \begin{cases} \frac{78.745}{K_p K_m} \\ \frac{5.255}{K_p K_m} \end{cases}$$

Se comprueba que la acción de control derivativa permite ganancias del controlador más elevadas para un mismo coeficiente de amortiguamiento. Eso supone que se pueden utilizar acciones de control proporcional más intensas sin aumentar las oscilaciones del conjunto controlador-proceso.

c) Suponiendo un cambio en la consigna $y_{sp}(t)$ de tipo escalón unidad:

$$\text{Error permanente} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s y_{sp}(s) - s \frac{y(s)}{y_{sp}(s)} y_{sp}(s) \right) = 1 - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{y}{y_{sp}} \frac{1}{s} = 1 - \frac{K_c K_p}{K_c K_m K_p + 1}$$

El error permanente es independiente de la acción derivativa tomada.

El periodo, para un sistema de segundo orden, es:

$$T = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

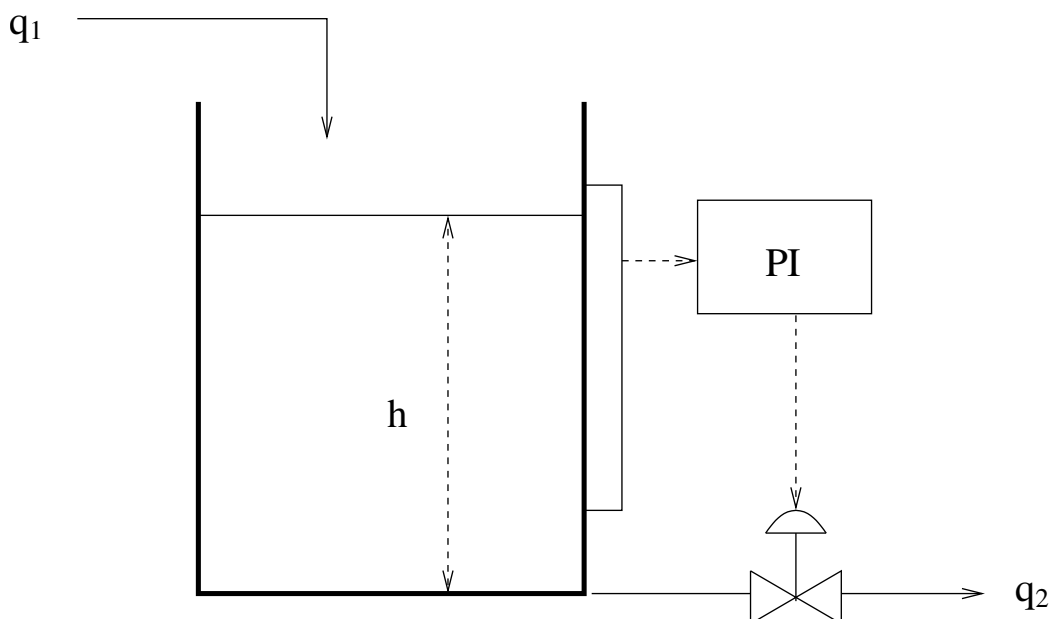
Sustituyendo:

$$T = \frac{2\pi\sqrt{\frac{600}{1+K}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{1+K}{600} \left(\frac{70+K\tau_D}{1+K} \right)^2}}$$

Al aumentar la constante de tiempo derivativa, aumenta el periodo. Lo que significa que la respuesta es menos oscilatoria.

Problema 7.3

Sea el sistema de lazo de control de la figura adjunta:



- Dibujar el diagrama de bloques indicando la función de transferencia de cada subsistema. Suponer que el detector de nivel actúa sin retraso alguno sobre el controlador
- ¿Cuál es la función de transferencia para variaciones de carga (H/Q_1)?
- Discutir la influencia de los parámetros de proceso y de los del controlador sobre la dinámica del sistema.

💡 Solución

- En primer lugar se realizará el balance macroscópico de materia al sistema, suponiendo que la densidad es constante e independiente del tiempo:

$$A \frac{dh(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t)$$

donde A es el área del depósito. A continuación se encuentra el balance en estado estacionario:

$$0 = q_{1,e} - q_{2,e}$$

donde el subíndice e indica que se trata de los valores en estado estacionario. Es decir, los valores de las variables anteriores a cualquier cambio. Habitualmente se trata de los valores de diseño de las variables.

Restando los dos balances se obtiene:

$$A \frac{dH(t)}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t)$$

donde se han tomado las siguientes variables de desviación:

$$H(t) = h(t) - h_e$$

$$Q_1(t) = q_1(t) - q_{1,e}(t)$$

$$Q_2(t) = q_2(t) - q_{2,e}(t)$$

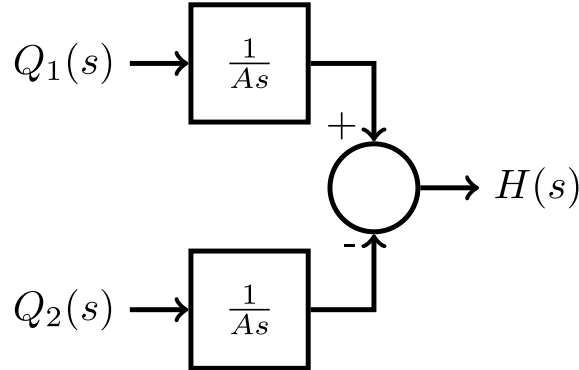
A continuación se realiza la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(A \frac{dH(t)}{dt} \right) &= \mathcal{L}(Q_1(t) - Q_2(t)) \\ As\bar{H}(s) &= \bar{Q}_1(s) - \bar{Q}_2(s) \end{aligned}$$

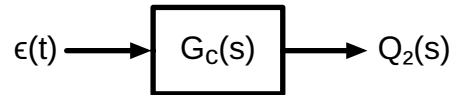
Por tanto:

$$\bar{H} = \overline{Q_1} \left(\frac{1}{As} \right) - \overline{Q_2} \left(\frac{1}{As} \right)$$

A partir del modelo matemático obtenido se puede dibujar el diagrama de bloques del proceso:



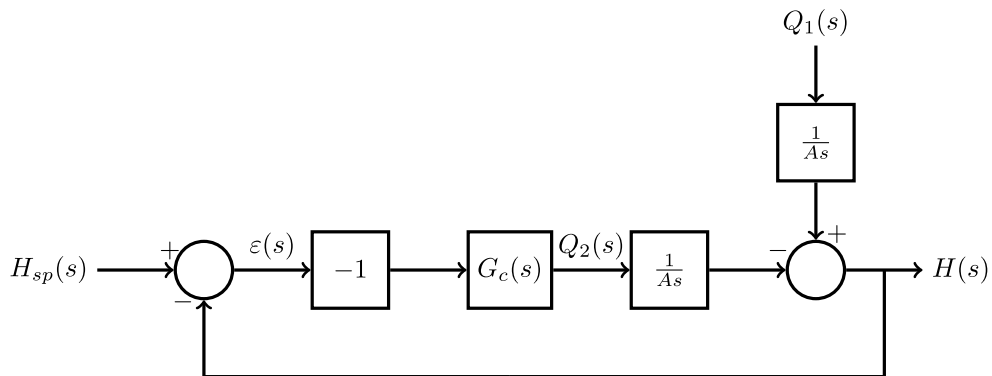
El diagrama de bloques del controlador es:



donde la función de transferencia del controlador es:

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right)$$

Suponiendo que la función de transferencia del medidor de nivel y de la válvula sean iguales a la unidad, es decir, que su dinámica sea instantánea se obtiene el siguiente diagrama de bloques del conjunto controlador-proceso:



Es importante destacar el bloque -1 existente entre el comparador y el controlador. En el caso de que este bloque no se incluyese el sistema sería inestable (si se utiliza una válvula de acción directa), ya que el número de cambios de signo en el interior del bucle sería par.

b) La función de transferencia será:

$$\frac{\bar{H}}{\overline{Q_1}} = \frac{\frac{1}{As}}{1 + K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) \frac{1}{As}} = \frac{\frac{\tau_I}{K_c} s}{\frac{A\tau_I}{K_c} s^2 + \tau_I s + 1}$$

- c) Al tratarse, la función de transferencia global, de un sistema de segundo orden, los parámetros que van a definir el comportamiento dinámico del lazo de control son la constante de tiempo y el coeficiente de amortiguamiento:

$$\tau = \sqrt{\frac{A\tau_I}{K_c}}$$

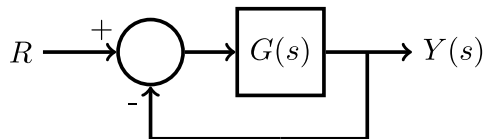
$$\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K_c\tau_I}{A}}$$

Se pueden considerar tres casos:

- Aumenta la constante de tiempo integral: En este caso aumenta el coeficiente de amortiguamiento y la constante de tiempo, lo que hace que la respuesta sea más lenta y amortiguada
- Aumenta la ganancia proporcional del controlador: En ese caso disminuye la constante de tiempo y aumenta el coeficiente de amortiguamiento, la respuesta debería ser más rápida y amortiguada
- Aumenta el área del depósito: Aumenta la constante de tiempo, pero disminuye el coeficiente de amortiguamiento

Problema 7.4

Sea el sencillo lazo de control de la figura:



donde $G_p = \frac{k}{s(s+p)}$.

Determinar la ganancia k y el parámetro p para que la dinámica del sistema responda a las siguientes características:

- Para un cambio en escalón, el sobrepaso debe ser inferior al 5 %.
- El periodo de oscilación de 4 s.

💡 Solución

La función de transferencia del lazo de control es:

$$G(s) = \frac{\bar{Y}(s)}{\bar{R}(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)} = \frac{1}{\frac{1}{k}s^2 + \frac{p}{k}s + 1}$$

La función de transferencia de un sistema de segundo orden es:

$$G(s) = \frac{K_p}{\tau_p^2 s^2 + 2\tau_p \zeta s + 1}$$

Por tanto:

$$\tau_p^2 = \frac{1}{k}$$

$$2\tau_p\zeta = \frac{p}{k}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\tau_p = \sqrt{\frac{1}{k}}$$

$$\zeta = \frac{p}{2\sqrt{k}}$$

El sobrepaso de este sistema de ser inferior al 5%, en consecuencia, el caso límite es que el sobrepaso tome el valor de 0.05:

$$0.05 = \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

Resolviendo la ecuación se encuentra que el coeficiente de amortiguamiento es $\zeta = 0.6901$.

El periodo del lazo de control debe ser de 4 s, lo que implica que:

$$T = 4s = \frac{2\pi\tau_p}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Sustituyendo el coeficiente de amortiguamiento se encuentra que la constante de tiempo es $\tau_p = 0.4607$.

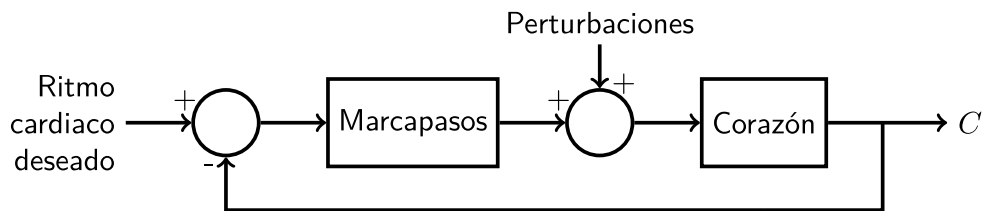
Una vez conocidos el coeficiente de amortiguamiento y la constante de tiempo encontrar los parámetros del proceso es trivial:

$$k = 4.71$$

$$p = 3.00$$

Problema 7.5

Los marcapasos electrónicos actúan sobre el corazón de manera que este responda adecuadamente al ritmo cardiaco deseado. La situación dinámica se puede representar por el bucle de control retroalimentado de la figura adjunta:



Se ha establecido que la función de transferencia del marcapasos es $\frac{K}{0.1s+1}$ y la del corazón es $\frac{1}{s}$. El ritmo cardiaco normal es de 70 pulsaciones/min.

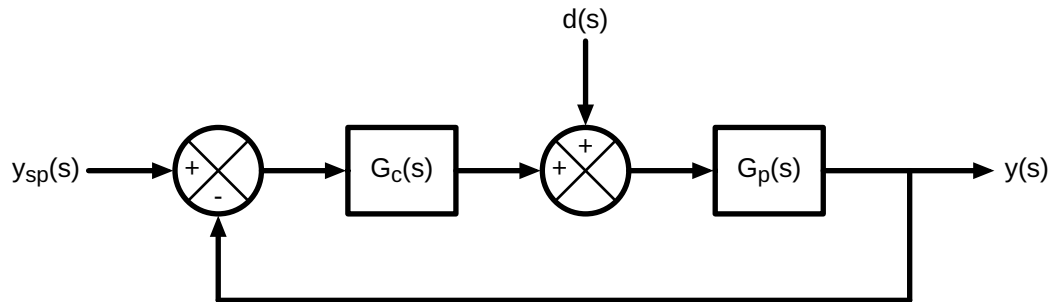
Determinar:

- Si $K = 10$, ¿cuánto vale la constante de tiempo de todo el sistema? ¿Qué sentido físico tiene dicha constante?
- Si se produjera una perturbación sostenida de 10 pulsaciones en exceso, ¿qué ritmo cardiaco estacionario se alcanzaría?

- c. Suponer que el individuo puede tolerar durante períodos de tiempo no excesivos un ritmo cardiaco de 110 pulsaciones/min, siempre que en ningún caso se llegue a 130, aunque sea puntualmente. ¿Qué valor ha de tener K para que un paso súbito de 70 a 110 pulsaciones/min en la consigna sea tolerable para el individuo?

💡 Solución

a) El lazo de control propuesto se puede representar como:



donde:

$$G_c = \frac{K}{0.1s + 1}$$

$$G_p = \frac{1}{s}$$

Para poder tomar variables de desviación se tomará como valor estacionario de la consigna:

$$y_{sp,e} = 70 \text{ pulsaciones/min}$$

La función de transferencia que relaciona los cambios de la consigna con la salida será:

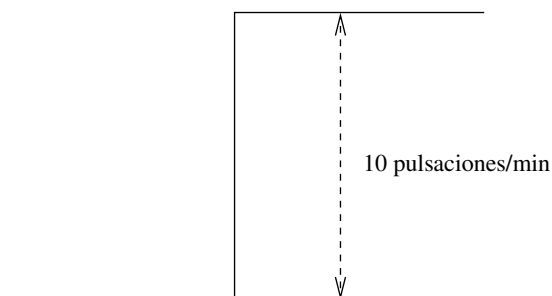
$$G = \frac{y}{y_{sp}} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} = \frac{K}{0.1s^2 + s + K} = \frac{1}{\frac{0.1}{K}s^2 + \frac{1}{K}s + 1}$$

Si $K = 10$, la constante de tiempo será (al tratarse de un sistema de segundo orden):

$$\tau = \sqrt{\frac{0.1}{10}} = 0.1 \text{ min}$$

La constante de tiempo mide la inercia del sistema marcapasos-corazón frente a cambios en la consigna o perturbaciones.

- b) En este caso, se realiza un cambio en las perturbaciones en forma de escalón de altura 10 pulsaciones/min:



Al tratarse de un escalón, la transformada de Laplace, tomando variables de desviación, de las perturbaciones será:

$$d(s) = \frac{10}{s}$$

Al buscarse el efecto estacionario de un cambio en las perturbaciones sobre la salida del lazo de control (ritmo cardiaco) es necesario conocer la función de transferencia que relaciona $y(s)$ con $d(s)$:

$$\frac{y(s)}{d(s)} = \frac{G_p}{1 + G_c G_p} = \frac{\frac{0.1s+1}{K}}{\frac{0.1}{K}s^2 + \frac{1}{K}s + 1}$$

Calcular la respuesta estacionaria es equivalente a pedir calcular el error permanente, sabiendo que $K = 10$ y que no se produce ningún cambio en la consigna:

$$\text{offset} = \lim_{t \rightarrow \infty} y_{sp}(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{y(s)}{d(s)} = - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{0.1s+1}{10}}{\frac{0.1}{10}s^2 + \frac{1}{10}s + 1} \frac{10}{s} = -1$$

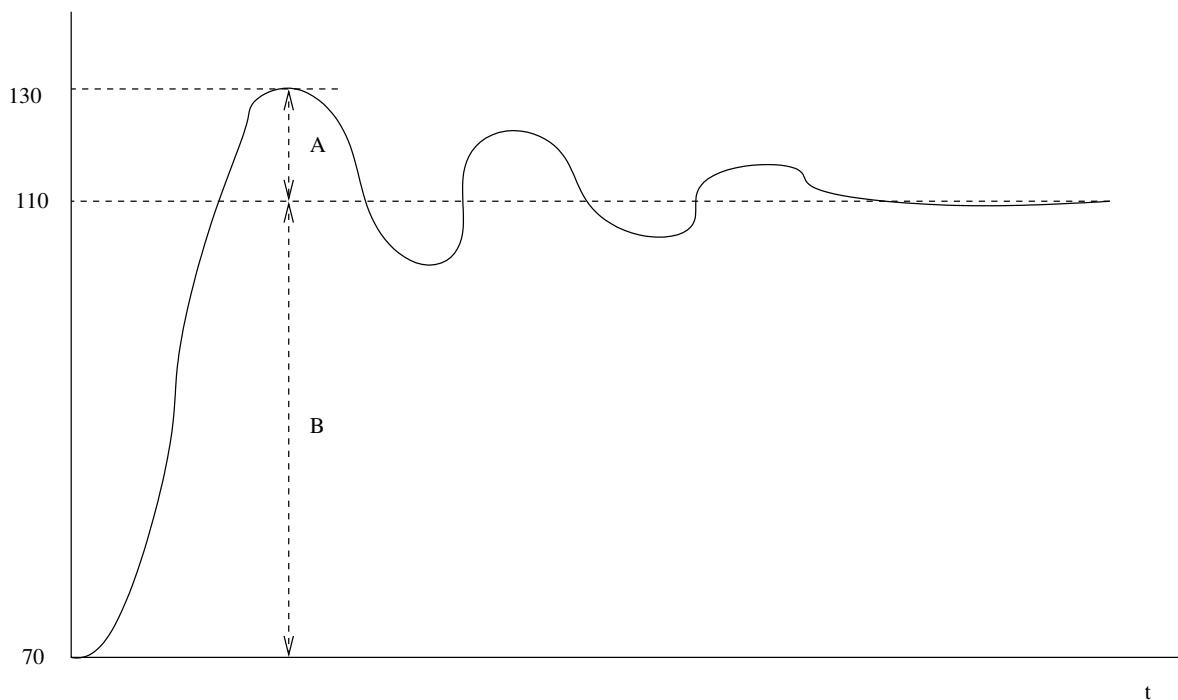
Es importante resaltar que el signo negativo del error permanente indica que el valor estacionario de la salida está por encima de la consigna.

El ritmo cardiaco estacionario alcanzado será de 71 pulsaciones/min, al deshacer las variables de desviación.

c) Se desea conocer K para que en caso de que el corazón pueda sufrir una aumento de ritmo cardiaco (por ejemplo, al verse sometido a un esfuerzo, es decir, a una perturbación) sin que se supere un cierto límite.

El sistema marcapasos-corazón forma un sistema de segundo orden, lo que significa que cuando se realiza un cambio, ya sea en la consigna o en las perturbaciones, puede dar respuestas oscilatorias subamortiguadas. De manera cualitativa, el caso límite sería:

Ritmo
cardiaco



El valor inicial del ritmo cardiaco es de 70 pulsaciones/min, el valor estacionario es de 110 pulsaciones/min y el valor máximo es de 130 pulsaciones/min. A partir de estos datos se puede calcular el sobrepaso utilizando su definición:

$$\text{Sobrepaso} = \frac{A}{B} = \frac{130 - 110}{110 - 70} = 0.5$$

Al tratarse de una función de transferencia de segundo orden:

$$\text{Sobrepaso} = \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = 0.5$$

Resolviendo la ecuación se encuentra que el coeficiente de amortiguamiento es:

$$\zeta = 0.2155$$

Del apartado anterior se sabe que:

$$\tau = \sqrt{\frac{0.1}{K}}$$

$$2\tau\zeta = \frac{1}{K}$$

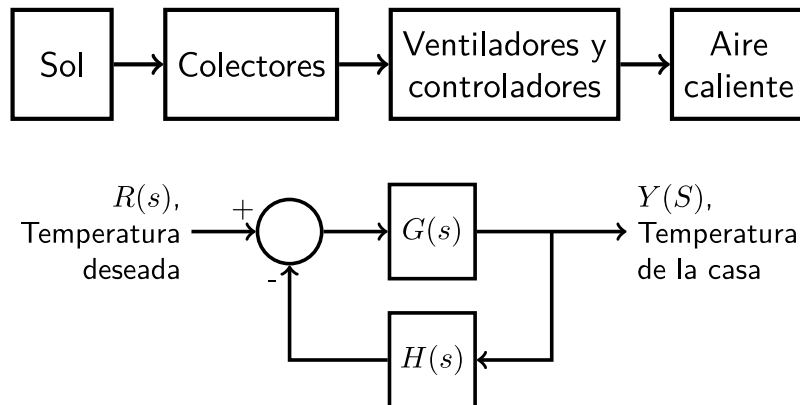
Resolviendo el sistema de ecuaciones se encuentra:

$$K = 53.8$$

Por tanto, K debe ser menor de 53.8 para que en ningún caso se alcance 130 pulsaciones/min.

Problema 7.6

Uno de los problemas más importantes con el que se enfrentan los ingenieros es el empleo óptimo de las fuentes de energía. Muchos ingenieros trabajan hoy en día en sistemas de energía solar para calefacción doméstica. Uno de esos sistemas emplea colectores solares y almacenamiento térmico, tal como se indica en el diagrama superior de la figura adjunta. El diagrama de bloques del sistema de control se presenta en la parte inferior de la figura:



La dinámica de los colectores, el almacenamiento térmico y la propia casa viene dada por $G(s) = \frac{k_1}{s^2}$. La dinámica de los instrumentos de medida viene determinada por $H(s) = \frac{k_2}{\tau_1 s + 1}$. Suponer que $\tau_1 = 1$ s y $\tau_2 = 0$ (aproximación).

- ¿Para qué valores de $k = k_1 k_2$ el sistema será subamortiguado y para cuáles sobreamortiguado?
- ¿Para qué valores de k la temperatura de la casa, al variar la consigna, no discrepará en ningún momento más de un 5 % del nuevo valor estacionario a alcanzar?
- Suponer que la temperatura de la casa está estabilizada en 22 °C. Si la consigna se cambia de pronto a 24 °C, siendo $k_2 = 1.1$, ¿qué temperatura se alcanzará en la casa?

💡 Solución

- a) La función de transferencia entre la temperatura de la casa (salida del lazo de retroalimentación) y la temperatura deseada (entrada a la lazo) es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{k_1}{s^2}}{1 + \frac{k_1}{s^2}k_2(s+1)} = \frac{\frac{1}{k_2}}{\frac{1}{k}s^2 + s + 1}$$

donde $k = k_1 k_2$.

Al tratarse de un sistema de segundo orden:

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{k}}$$

$$2\tau\zeta = 1$$

donde τ es la constante de tiempo del lazo de control y ζ es el coeficiente de amortiguamiento. Despejando se encuentra:

$$k = (2\zeta)^2$$

Por tanto,

$$\begin{array}{ll} \zeta > 1 \rightarrow k > 4 & \text{Sobreamortiguado} \\ \zeta = 1 \rightarrow k = 4 & \text{Críticamente amortiguado} \\ \zeta < 1 \rightarrow k < 4 & \text{Subamortiguado} \end{array}$$

- b) Un cambio de un 5% del nuevo valor estacionario, tras un cambio en la consigna, es equivalente a un sobrepaso de 0.05. Por tanto,

$$\text{Sobrepaso} = 0.05 = \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

Al resolver la ecuación se encuentra que:

$$\zeta = 0.6901$$

Como se dice que el cambio no debe superar el 5% del valor estacionario:

$$k \geq 1.905$$

- c) El cambio propuesto en la consigna es una función en escalón de altura 2 °C ($R(s) = \frac{2}{s}$). El valor que alcanzará la casa es:

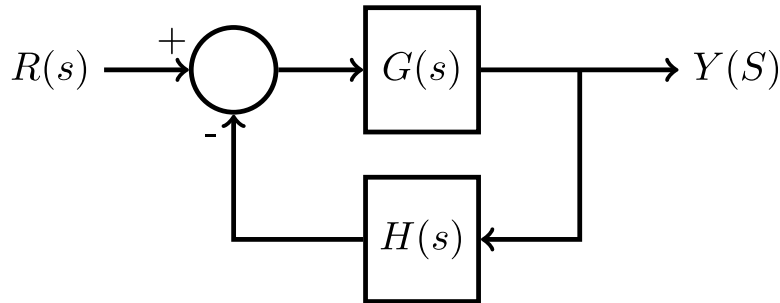
$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Y(s)}{R(s)} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{1}{k_2}}{\frac{1}{k}s^2 + s + 1} \frac{2}{s} = 1.818$$

El valor anterior no es la temperatura estacionaria que alcanzará la casa que ya la variable $Y(t)$ está definida con variables de desviación. Para obtener la temperatura deseada hay que tener en cuenta que la temperatura en estado estacionario es de 22 °C, lo que significa que:

$$T_{\text{final}} = 22 + 1.818 = 23.8 \text{ °C}$$

Problema 7.7

Sea el sistema cuyo diagrama de bloques se presenta en la figura adjunta:



donde $G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$ y $H(s) = 1 + K_m s$.

Determinar los valores de ganancia K y de la constante K_m para que la respuesta a un escalón unidad tenga un sobrepaso de 0.2 al cabo de 1 s.

💡 Solución

La función de transferencia que describe la dinámica de este sistema es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+1)}}{1 + \frac{K}{s(s+1)}(1 + K_m s)} = \frac{1}{\frac{1}{K}s^2 + \frac{1+K K_m}{K}s + 1}$$

El sobrepaso de este sistema debe valer 0.2, por lo tanto:

$$\text{Sobrepaso} = 0.2 = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = \frac{A}{B}$$

Resolviendo la ecuación se encuentra que el coeficiente de amortiguamiento es:

$$\zeta = 0.4559$$

El valor máximo de un sistema de segundo orden subamortiguado para una entrada en escalón unidad ($R(s) = \frac{1}{s}$) es:

$$Y_{\max} = A + B$$

donde B es el valor estacionario de la respuesta. En este caso:

$$B = \lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Y(s)}{R(s)} \frac{1}{s} = 1$$

Por tanto, $A = 0.2$ y $Y_{\max} = 1.2$.

La respuesta de un sistema de segundo orden subamortiguado para una entrada en escalón es:

$$\frac{y(t)}{kM} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta t}{\tau}} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2} \frac{t}{\tau} - \text{atan} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

donde k es la ganancia global del proceso, es este caso 1. M es la altura del escalón ($M = 1$). La respuesta máxima se tiene que producir cuando $t = 1$ s. Sustituyendo:

$$Y_{\max}(t = 1s) = 1.2 = 1 - \frac{1}{0.89} e^{-\frac{0.4559}{\tau}} \sin\left(\frac{0.89}{\tau} + 1.0974\right)$$

Resolviendo la ecuación se obtiene:

$$\tau = 0.285$$

A partir de la función de transferencia del sistema (de segundo orden) se encuentra:

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{K}}$$

$$2\zeta\tau = \frac{1 + KK_m}{K}$$

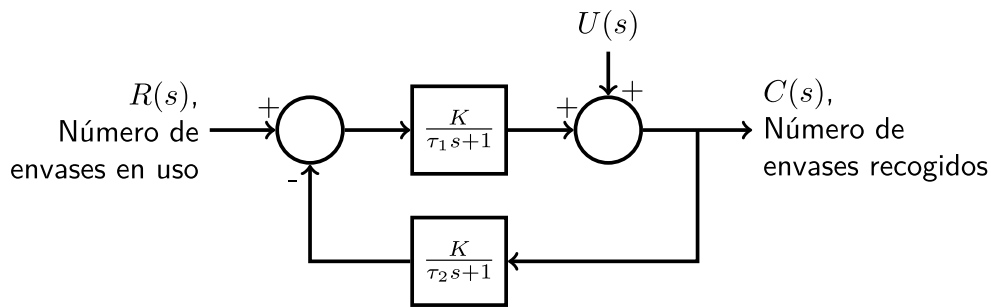
Sustituyendo y operando se encuentra:

$$K = 12.31$$

$$K_m = 0.179$$

Problema 7.8

En muchas ciudades se han realizado esfuerzos significativos para reciclar los envases de vidrio. En la figura siguiente se representa un diagrama de bloques simplificado del proceso de reciclado de una ciudad:



El énfasis de la campaña de recolección viene dado por la ganancia K . La perturbación U representa los envases que se rompen o se tiran a la basura o a otro lugar no controlado. Suponer $\tau_1 = 1$ mes y $\tau_2 = \frac{1}{2}$ mes. Determinar:

- La ganancia K para que el sistema esté críticamente amortiguado.
- El error permanente para una entrada en escalón unidad en la consigna, suponiendo $U(s) = 0$. ¿Cuánto sería ese error permanente para la ganancia del apartado a)?
- El error permanente para una pérdida de envases M en escalón, suponiendo que no varía la consigna. ¿Este error permanente será positivo o negativo?

💡 Solución

a) La función de transferencia $\frac{C(s)}{R(s)}$ es la siguiente:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s+1}}{1 + \frac{K}{s+1} \frac{1}{0.5s+1}} = \frac{\frac{K(0.5s+1)}{1+K}}{\frac{0.5}{1+K}s^2 + \frac{1.5}{1+K}s + 1}$$

La constante de tiempo de esta función de transferencia es:

$$\tau = \sqrt{\frac{0.5}{1+K}}$$

Y el coeficiente de amortiguamiento:

$$\zeta = \frac{\frac{1.5}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1+K}}$$

Un sistema está críticamente amortiguado cuando su coeficiente de amortiguamiento es la unidad. Por tanto, de la expresión anterior se obtiene:

$$K = 0.125$$

b) El error permanente será:

$$\text{Error permanente} = \lim_{t \rightarrow \infty} [R(t) - C(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} s[R(t) - C(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{s} - s \frac{C(s)}{R(s)} \frac{1}{s} \right] = \frac{1}{1+K}$$

Para $K = 0.125$:

$$\text{Error permanente} = 0.889$$

c) La función de transferencia $\frac{C(s)}{U(s)}$ es:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + \frac{K}{s+1} \frac{1}{0.5s+1}} = \frac{\frac{0.5s^2+1.5s+1}{1+K}}{\frac{0.5}{1+K}s^2 + \frac{1.5}{1+K}s + 1}$$

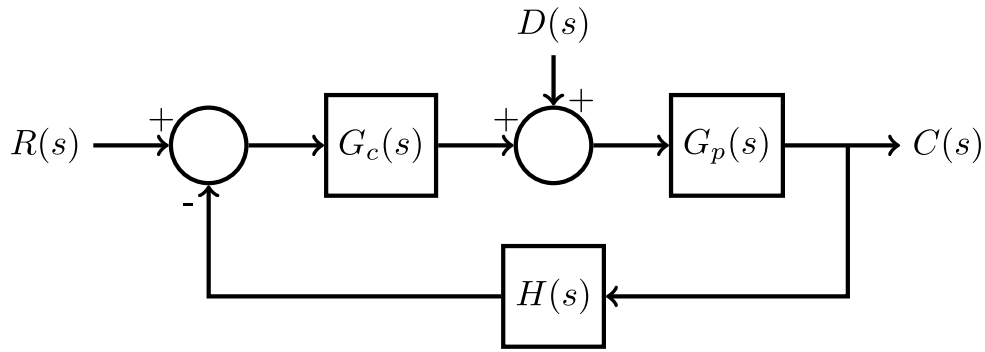
El error permanente es en este caso:

$$\text{Error permanente} = \lim_{t \rightarrow \infty} [R(t) - C(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} s[R(t) - C(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{0}{s} - s \frac{C(s)}{U(s)} \frac{M}{s} \right] = -\frac{M}{1+K}$$

Como M es un valor negativo (pérdida de envases), el error permanente es positivo, es decir, $R(t) > C(t)$.

Problema 7.9

El comportamiento dinámico de una compleja organización empresarial se puede considerar un sistema de control por retroalimentación. Un modelo sencillo de un sistema de gestión se presenta en la figura adjunta. La función de transferencia correspondiente a la actividad de gestión de la empresa es $G_c(s) = \frac{k_1}{s}$. La función de transferencia correspondiente a las actividades de ingeniería y producción es $G_p(s) = \frac{k_2}{\tau_p s + 1}$. La función de transferencia de la actividad de evaluación de los resultados, $C(s)$, de la empresa es $H(s) = k_4 + k_5 s$. El resultado de la evaluación, $B(s)$, se compara con los objetivos propuestos, $R(s)$, y la diferencia constituye la entrada al bloque de gestión, G_c , que dará lugar a la pertinente acción correctora. $D(s)$ representa las perturbaciones que actúan sobre el sistema.



- ¿Cuál es la función (en el espacio s) que relaciona la salida $C(s)$ con la consigna $R(s)$ y la carga $D(s)$?
- Calcular el error permanente si se produce en la consigna una variación de una unidad en forma de escalón.
- Calcular el sobrepaso de la respuesta en tiempo real a la variación anterior.
- ¿Qué sencilla modificación realizaría para mejorar la dinámica de este sistema de control?

Datos:

- $k_1 k_2 = 0.1$
- $\tau_p = 10$ meses
- $k_4 = 5$
- $k_5 = 7.6$

💡 Solución

a) La respuesta del lazo de control es:

$$C(s) = \frac{G_p}{1 + G_c G_p H} D(s) + \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p H} R(s)$$

b) En este apartado hay que considerar que se produce un cambio en escalón unidad para la consigna ($R(s) = U(s) = \frac{1}{s}$). En primer lugar hay que encontrar la función de transferencia que relaciona la salida del lazo de control con la consigna:

$$\frac{C}{R} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p H} = \frac{\frac{k_1}{s} \frac{k_2}{\tau_p s + 1}}{1 + \frac{k_1 k_2 (k_4 + k_5 s)}{s(\tau_p s + 1)}} = \frac{0.2}{20s^2 + 3.52s + 1}$$

El error permanente será:

$$\begin{aligned} \text{Error permanente} &= \lim_{t \rightarrow \infty} (R(t) - C(t)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(sR(s) - s \frac{C(s)}{R(s)} R(s) \right) = \\ &= 1 - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{0.2}{20s^2 + 3.52s + 1} \frac{1}{s} = 0.8 \end{aligned}$$

c) Para poder calcular el sobrepaso es necesario conocer en primer lugar el coeficiente de amortiguamiento del bucle de control. A partir de la ec. (1) se encuentra que:

$$\begin{cases} \tau^2 = 20 \\ 2\tau\zeta = 3.52 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se encuentra que la constante de tiempo es $\tau = 4.4721$ y la constante de amortiguamiento $\zeta = 0.3935$. El sobrepaso es:

$$\text{Sobrepaso} = \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = 0.2606$$

- d) El valor máximo de respuesta del lazo de control para un cambio en la consigna en escalón unidad (tal como se dice en el apartado anterior) es:

$$C_{\max} = A + B$$

Tal como se muestra en la figura siguiente:

using SymPy, Plots, Roots

@syms s, t::real

Cambio en la consigna en forma de escalón unidad

y_s = 1/s

Función de transferencia del lazo de control

G = 2//10/(20s² + 352//100*s + 1)

Respuesta del lazo de control

y_s = G*y_s

y_t = sympy.inverse_laplace_transform(y_s, s, t)

Para calcular la posición del máximo, se debe cumplir que dy/dt = 0

Para calcular la derivada y' usaremos la propiedad de la transformada

de Laplace de la derivada.

Calcular la derivada de y_t directamente es demasiado complejo, esto es

mucho más eficaz

dy_s = s*G*y_s

dy_t = sympy.inverse_laplace_transform(dy_s, s, t)

Valor de y(t -> oo)

B = sympy.limit(s*y_s, s, 0)

Resolvemos la ecuación numéricamente para encontrar la posición del máximo

y su valor

t_{max} = fzero(dy_t, [0.1, 20])

y_{max} = y_t(t_{max})

plot(y_t, -1, 50, xlabel="t", ylabel="C(t)", lw=2, legend=false)

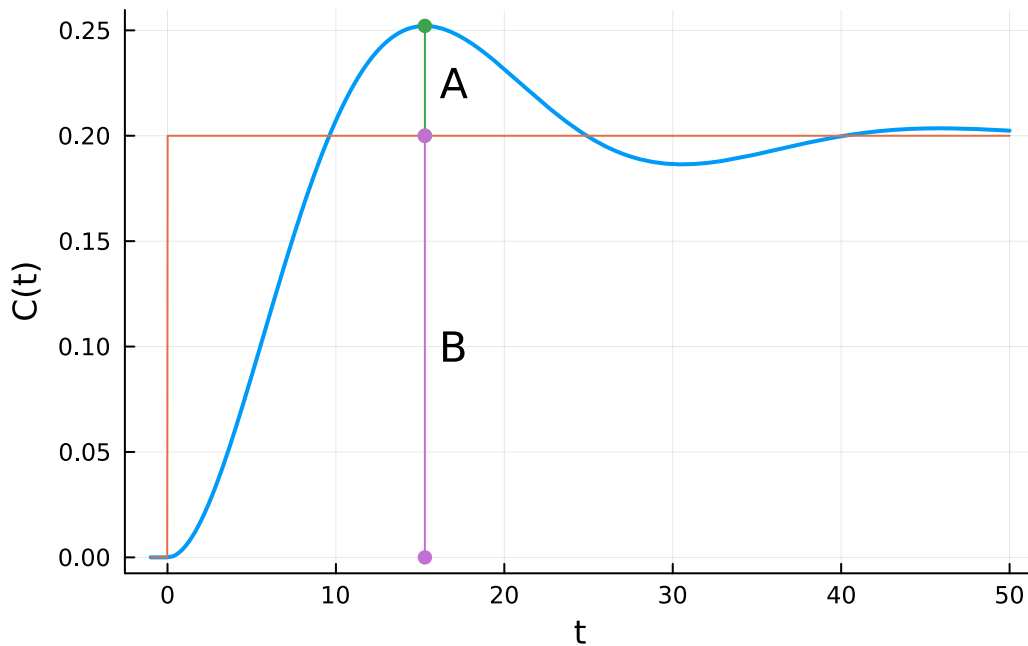
plot!(B*Heaviside(t))

plot!([t_{max}, t_{max}], [B, y_{max}], marker=:circle, msw=0, annotations=(17, 0.225, text("A")))

plot!([t_{max}, t_{max}], [0, B], marker=:circle, msw=0, annotations=(17, 0.1, text("B")))

NOTA: El problema 7.10 utiliza un método numérico para calcular la derivada,

lo que puede ser útil para situaciones en las que no se puede encontrar una solución analítica para la derivada



B es el valor estacionario de la respuesta del bucle de control:

$$B = \lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{C(s)}{R(s)} \frac{1}{s} = 0.2$$

El valor de A se puede calcular a partir del sobrepaso:

$$\text{Sobrepaso} = \frac{A}{B}$$

Por tanto:

$$C_{\max} = B(\text{sobrepaso} + 1) = 0.2521$$

La respuesta de un sistema de segundo orden subamortiguado ($\zeta < 1$) para una entrada en escalón unidad es:

$$y(t) = K_p \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta t}{\tau}} \sin \left[\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau} t + \text{atan} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right] \right\}$$

Para encontrar el tiempo ($t_{\max}$) en el que se produce la respuesta máxima ($C_{\max}$) hay que sustituir $K_p = 0.2$, $\tau = 4.4721$ y $\zeta = 0.3935$ y resolver la siguiente ecuación:

$$0.2521 = 0.2[1 - 1.0878e^{-0.088t_{\max}} \sin(0.2056t_{\max} + 1.1664)]$$

Se obtiene:

$$t_{\max} = 15.20 \text{ meses}$$

- e) La manera más sencilla de mejorar la dinámica de este lazo de control, lo que implica el tener una respuesta más rápida por parte del bucle, es disminuir la constante de tiempo τ_p de la función de transferencia correspondiente a las actividades de ingeniería y producción. El resultado sería que el sistema se adaptaría más rápidamente a los cambios de consigna y eliminaría con mayor rapidez aquellas perturbaciones que se pudieran producir.

Problema 7.10

Considerar una lazo cerrado con las funciones de transferencia siguientes:

$$G_c = 5$$

$$G_f = 1$$

$$G_p = \frac{2}{(s+1)(3s+1)}$$

$$G_d = \frac{1}{(s+1)(3s+1)}$$

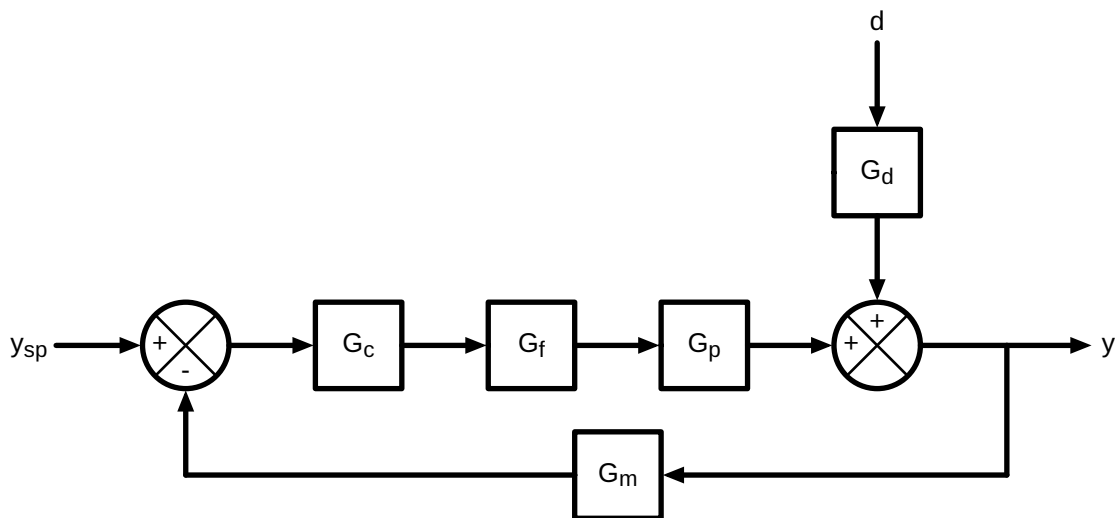
$$G_m = 1$$

Para un cambio en el *set point* de magnitud 2, contestar a las siguientes preguntas:

- Derivar una expresión en el dominio de Laplace para la respuesta de lazo cerrado.
- Obtener la respuesta del lazo cerrado en tiempo real.
- Calcular el valor máximo de $y(t)$ y establecer cuando ocurre.
- Calcular el error permanente.
- Calcular el periodo de oscilación de la respuesta de lazo cerrado.
- Dibujar cualitativamente la respuesta en tiempo real.

💡 Solución

a) En este problema se propone el siguiente lazo de control:



La respuesta de este sistema en el dominio de Laplace para un cambio en la consigna es:

$$y = \frac{G_c G_f G_p}{1 + G_c G_f G_p} y_{sp}$$

Sustituyendo se encuentra:

$$y = \frac{\frac{10}{11}}{\frac{3}{11}s^2 + \frac{4}{11}s + 1} \frac{2}{s}$$

- b) A partir del conocimiento de las ecuaciones de la respuesta de un proceso de segundo orden para una entrada en escalón se puede obtener la respuesta en tiempo real fácilmente. En función del coeficiente de amortiguamiento se elije una de las ecuaciones. Se puede calcular el coeficiente de amortiguamiento sabiendo:

$$\begin{cases} \tau^2 = \frac{3}{11} \\ 2\tau\zeta = \frac{4}{11} \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación anterior se encuentra:

$$\begin{cases} \tau = 0.5222 \\ \zeta = 0.3482 \end{cases}$$

El coeficiente de amortiguamiento es menor que la unidad, lo que significa que se trata de un sistema subamortiguado. La respuesta será:

$$y(t) = K_p M \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \frac{t}{\tau}} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{t}{\tau} + \text{atan} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right]$$

donde:

- K_p es la ganancia del proceso. En este caso $K_p = \frac{10}{11}$.
- M es la altura del escalón ($M = 2$).

Por tanto la respuesta en tiempo real es:

$$y(t) = 1.818[1 - 1.067e^{-0.6667t} \sin(2.043t + 1.215)]$$

- c) Si se representa la función anterior se obtiene:

`using Plots, SymPy, Roots, ForwardDiff`

`@syms t, s`

Definimos las funciones de transferencia

`Gc = 5`

`Gf= 1`

`Gp = 2/((s+1)*(3s+1))`

`Gm = 1`

Función de transferencia del lazo de control

`G = Gc*Gf*Gp/(1+Gc*Gf*Gp*Gm)`

Cambio en la consigna

`Csp = 2/s`

Cálculo de y(s)

`C_s = G*Csp`

Cálculo de y(t)

`C = sympy.inverse_laplace_transform(C_s, s, t)`

Transformamos C(t) para que se pueda realizar la diferenciación automática con ForwardDiff

```

C_t(t) = real(lambdify(C)(t))

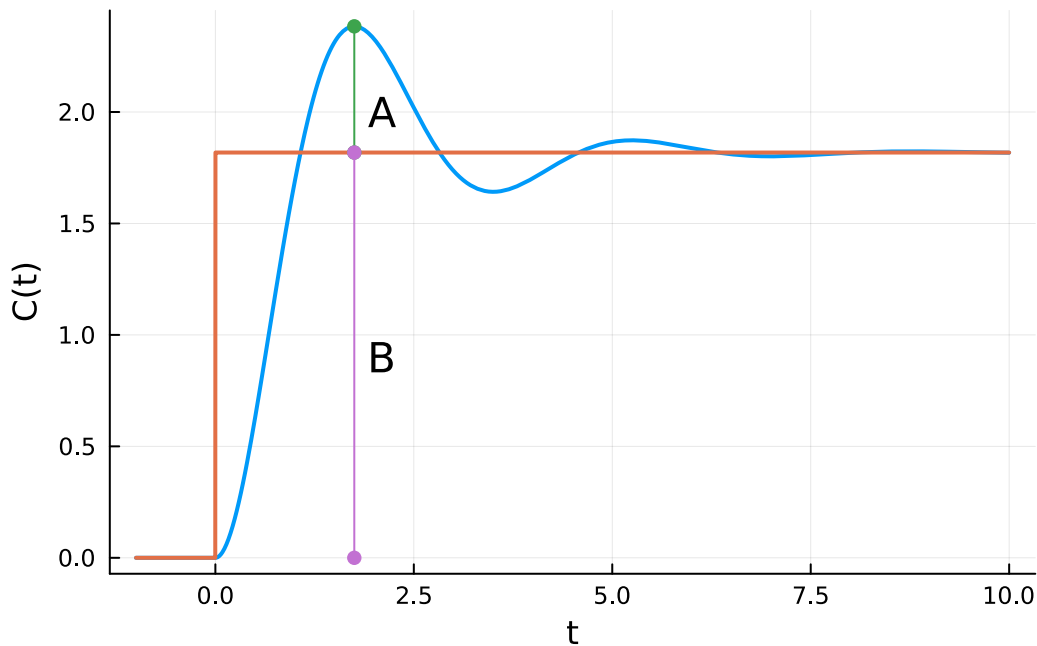
# Valor de C(t) cuando t tiende a infinito
B = sympy.limit(s*C_s, s, 0)

# Valor máximo de C(t), buscamos el máximo
tmax = fzero(x->ForwardDiff.derivative(C_t, x), 1)
Cmax = C_t(tmax)

plot(C, -1, 10, xlabel="t", ylabel="C(t)", legend=false, lw=2)
plot!(B*Heaviside(t), lw=2)
plot!([tmax, tmax], [B, Cmax], marker=:circle, msw=0,
      annotations=(2.1, 2, text("A")))
plot!([tmax, tmax], [0, B], marker=:circle, msw=0,
      annotations=(2.1, 0.9, text("B")))

# NOTA: El problema 7.9 resuelve un problema similar pero sin utilizar
# un método numérico para calcular la derivada.

```



En la gráfica se puede observar claramente que el valor máximo de la respuesta tiene el valor de $A + B$. El valor de B es el valor estacionario que alcanza el lazo de control, es decir:

$$B = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s)$$

Para poder calcular el valor de A solo hay que recordar la definición de sobrepaso:

$$\text{Sobrepaso} = \frac{A}{B}$$

Por tanto el valor máximo de $y(t)$ es:

$$y_{\max} = A + B = (\text{sobrepaso} + 1)B$$

El sobrepaso es:

$$\text{Sobrepaso} = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = 0.3113$$

El valor de B es:

$$B = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{10}{11}}{\frac{3}{11}s^2 + \frac{4}{11}s + 1} \frac{2}{s} = \frac{20}{11}$$

Por tanto el valor máximo de la respuesta es:

$$y_{\max} = (0.3113 + 1) \frac{10}{11} = 2.384$$

Para encontrar en que instante se produce este valor máximo de respuesta hay que resolver la siguiente ecuación:

$$y_{\max} = 2.384 = 1.818[1 - 1.067e^{-0.6667t_{\max}} \sin(2.043t_{\max} + 1.215)]$$

El resultado es:

$$t_{\max} = 1.75$$

La estrategia para encontrar la posición del máximo utilizada para dibujar la gráfica anterior es diferente. En este caso se ha buscado el primer punto para el que la derivada de la respuesta es cero. No ha sido necesario calcular el sobrepaso.

d) El periodo de oscilación es:

$$T = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$T = 3.50$$

e) La respuesta en tiempo real está dibujada más arriba.

Problema 7.11

Repetir el problema anterior para un cambio en las perturbaciones de magnitud 1.5.

Problema 7.12

Sea un lazo de control por retroalimentación de un proceso de primer orden de ganancia 5 y constante de tiempo 2. Se selecciona un controlador proporcional de ganancia unidad. La función de transferencia del medidor es de primer orden con ganancia K_m y constante de tiempo τ_m . Asumiendo que la función de transferencia del elemento final de control es igual a la unidad:

- Examinar el efecto de K_m sobre la respuesta de lazo cerrado (p.ej., para $\tau_m = 1$ evaluar la constante de tiempo y coeficiente de amortiguamiento de la respuesta de lazo cerrado para varios valores de K_m).
- Evaluar el efecto de τ_m sobre la respuesta de lazo cerrado.

- c. Dibujar cualitativamente las respuestas de lazo cerrado en función de varios valores de K_m y τ_m . Discutir el efecto del medidor en la respuesta de lazo cerrado en función de estas gráficas (p.ej., discutir el efecto sobre el sobrepaso, la razón de disminución y el periodo de oscilación).

Problema 7.13

Considerar un sencillo sistema de control de nivel de un tanque de almacenamiento. Se puede tomar como variable manipulable tanto el caudal de la entrada F_i como el caudal de salida F_o . Inicialmente el sistema se encuentra en estado estacionario con $F_i = F_o = 3 \text{ m}^3/\text{min}$ y un nivel de líquido de 60 cm. El área de la sección del depósito es de 2 m^2 . Responder:

- Encontrar la respuesta de lazo cerrado a un incremento en escalón unidad en el punto de consigna cuando se utiliza F_i como variable manipulable.
- Repetir a) pero utilizando F_o como variable manipulable.
- Dibujar las dos respuestas y explicar las diferencias, si las hay, entre tomar F_i y F_o como variables manipulables.

Tomar un controlador proporcional de ganancia 10 y que las funciones de transferencia de la válvula y del medidor son iguales a la unidad.

Problema 7.14

Repetir el problema anterior con las siguientes modificaciones:

- La función de transferencia de la válvula de entrada es $G_{f,i}(s) = 1$ y la de la válvula de salida es $G_{f,o}(s) = \frac{10}{3s+1}$.
- La ganancia proporcional es igual a 10.

8 Análisis de estabilidad de sistemas

i Nota

Para representar los diagramas de Bode utilizaremos el paquete `Clasecontrol.jl`. Para poder utilizarlo, es necesario añadir un registro a la lista de registros de Julia. Este paso solo hay que realizarlo una vez.

En el *prompt* de Julia, hay que cargar en primer lugar `Pkg.jl`:

```
using Pkg
```

A continuación, hay que añadir el registro:

```
pkg"registry add https://github.com/runjaj/Caronte"
```

Una vez realizada esta operación, no es necesario repetirla. El paquete `Clasecontrol.jl` se puede utilizar como cualquier otro paquete del registro oficial de Julia.

8.1 Definición de estabilidad. Ecuación característica

Un sistema dinámico es *estable* si para cualquier entrada acotada se obtiene una salida acotada, independientemente de cuál fuese su estado inicial.

La inestabilidad de los sistemas es la mayor limitación a la hora de realizar la sintonía del controlador.

Tal como se ha visto en los temas anteriores la respuesta de bucle cerrado para un sistema de control generalizado es:

$$y = \frac{G_c G_p G_f}{1 + G_c G_p G_f G_m} y_{sp} + \frac{G_d}{1 + G_c G_p G_f G_m} d \quad (8.1)$$

Normalmente, la estabilidad o inestabilidad de un sistema es intrínseca al mismo, independientemente de la entrada. Es un problema del sistema.

Para estudiar la estabilidad de la respuesta es necesario realizar la transformada inversa de Laplace para obtener la respuesta en tiempo real. Para ello hay que descomponer $y(s)$ en fracciones simples. Para realizar esta descomposición se deben encontrar las raíces de la *ecuación característica* ($1 + G_c G_p G_f G_m = 0$). La ecuación característica es el denominador de las funciones de transferencia tanto del problema de la regulación o de la carga como del servocontrol (Figura 8.1), es decir, es 1 más el producto de las funciones de transferencia del lazo de retroalimentación (G_{OL}).

Las raíces de la ecuación característica son α_i , $i = 1, \dots, n$. Por tanto, una vez realizada la descomposición en fracciones simples:

$$y(s) = \frac{y_0}{s} + \frac{y_1}{s - \alpha_1} + \frac{y_2}{s - \alpha_2} + \dots + \frac{y_n}{s - \alpha_n}$$

Tras realizar la transformada inversa de Laplace se obtiene la función en tiempo real:

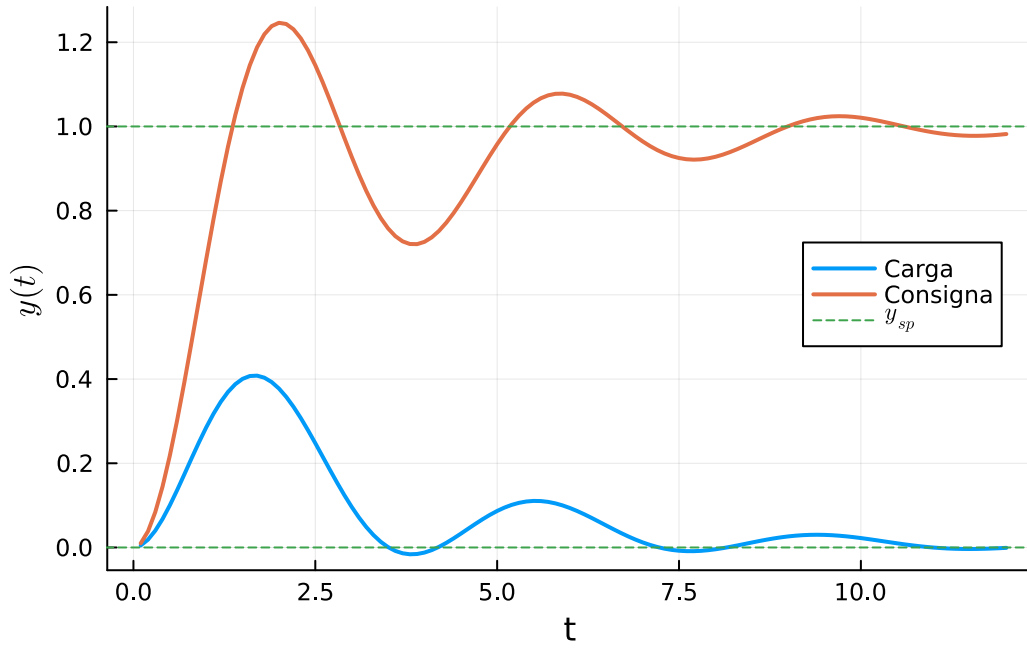


Figura 8.1: Diferentes objetivos de control, eliminación de perturbaciones o cambios en la carga (servomecanismo) y adaptación a nuevas condiciones o cambios en la consigna.

$$y(t) = y_0 + y_1 e^{\alpha_1 t} + y_2 e^{\alpha_2 t} + \dots + y_n e^{\alpha_n t}$$

donde:

$$\alpha_i \in \mathbb{C}, \forall i$$

Es decir, todas las raíces de la ecuación característica son números complejos. Por tanto, para todo i :

$$\alpha = \beta + i\gamma \Rightarrow e^{\alpha t} = e^{\beta t} (\cos \gamma t + i \sin \gamma t)$$

El valor de γ no influye en la salida del sistema desde el punto de vista de la estabilidad, ya que tanto el seno como el coseno son funciones acotadas. Solo cambia la frecuencia de la respuesta.

En cambio, si β es positivo, aparece un problema de estabilidad, porque la respuesta aumentaría constantemente con el tiempo. Por tanto, para que la salida del sistema sea estable todas las partes reales de las raíces de la ecuación característica deben ser negativas, deben estar situadas en el semiplano real negativo. En el caso de que alguna no lo fuese:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$$

Con esta información es posible diseñar técnicas que permitan seleccionar las constantes del controlador garantizando la estabilidad del sistema.

8.2 Método de Routh-Hurwitz

El método de Routh-Hurwitz permite comprobar de una manera rápida y sencilla si alguna de las partes reales de las raíces de la ecuación característica es positiva sin necesidad de tener que encontrar las raíces.

Operando la ecuación característica se obtiene:

$$1 + G_c G_p G_f G_m \equiv a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

donde a_0 debe ser positivo.

El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz es:

1. Condición necesaria pero no suficiente: Todos los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ de la ecuación característica deben ser positivos para que el sistema sea estable. Si alguno de los coeficientes es negativo, al menos una de las raíces tendrá la parte real positiva.
2. Condición necesaria y suficiente: Se construye la matriz de Routh:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 2 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ 3 & A_1 & A_2 & A_3 & \dots & \\ 4 & B_1 & B_2 & B_3 & \dots & \\ 5 & C_1 & C_2 & C_3 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ n+1 & W_1 & W_2 & & & \end{array}$$

donde:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad A_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \quad A_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}, \quad \dots \\ B_1 &= \frac{A_1 a_3 - a_1 A_2}{A_1}, \quad B_2 = \frac{A_1 a_5 - a_1 A_3}{A_1}, \quad \dots \\ C_1 &= \frac{B_1 A_2 - A_1 B_2}{B_1}, \quad C_2 = \frac{B_1 A_3 - A_1 B_3}{B_1}, \quad \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

El sistema será estable si todos los términos de la primera columna de la matriz $(a_0, a_1, A_1, B_1, C_1, \dots, W_1)$ son positivos. Si alguno de estos elementos es negativo el sistema será inestable. Por cada cambio de signo habrá una raíz con la parte real positiva.

El criterio de estabilidad de Routh presenta algunas limitaciones. No puede tratar sistemas con retrasos (tiempos muertos) o no lineales. Solo da información de si un sistema es estable o inestable, no da información de si un sistema estable está cerca o lejos de la inestabilidad. Otra limitación es la necesidad de tener que expresar la ecuación característica como un polinomio en s , esto puede ser bastante complicado en sistemas complejos.

Para encontrar qué valores de las constantes del controlador están situadas en el límite de estabilidad se debe resolver la siguiente ecuación:

$$W_1 s^2 + W_2 = 0$$

De esta manera se puede determinar un par de raíces de la ecuación característica con la parte real nula, es decir, situadas sobre el eje imaginario. Lógicamente, W_1 y W_2 dependen de los parámetros del controlador.

💡 Ejemplo

En el [problema 8.2](#) se utiliza el criterio de Routh-Hurwitz para demostrar la estabilidad de un lazo de control por retroalimentación.

8.3 Método del lugar de las raíces

Representando las raíces de la ecuación característica en el plano complejo es posible deducir el comportamiento de un sistema según su posición:

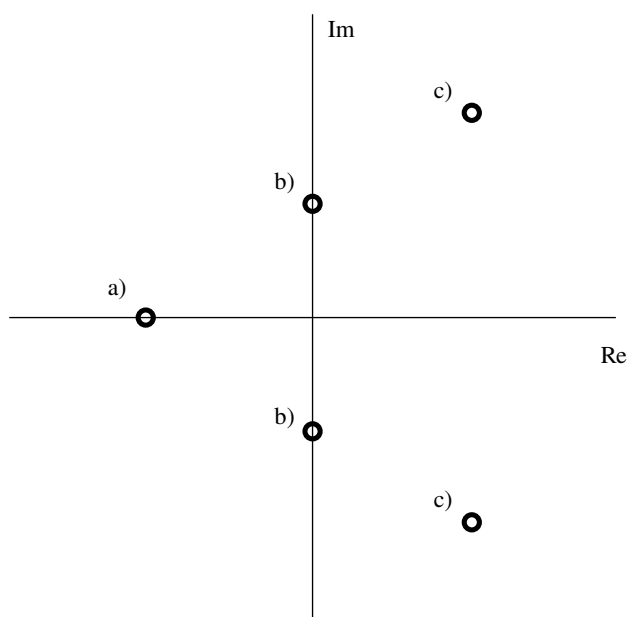


Figura 8.2: Situación en el plano complejo de diferentes raíces de la ecuación característica: a) Respuesta sobreamortiguada o críticamente amortiguada, b) límite de estabilidad y c) sistema inestable.

1. Si todas las raíces están en el semiplano negativo de s , el sistema es estable
2. Si todas las raíces se encuentran en el eje real negativo (las raíces son números reales), el sistema está sobreamortiguado o críticamente amortiguado
3. Cuanto más alejadas del origen de coordenadas estén las raíces situadas en el eje negativo, más rápida será la dinámica del sistema (menor será la constante de tiempo)
4. Las raíces más cercanas al eje imaginario dominarán la dinámica de la respuesta mientras que aquellas que estén más alejadas dejarán de influir en la respuesta rápidamente
5. Cuanto más alejadas se encuentren las raíces conjugadas del eje real, más subamortiguado estará el sistema

Con esta información es posible plantear una técnica para estudiar la dinámica de un sistema a partir de su ecuación característica. Esta técnica es el lugar de las raíces, se basa en representar las raíces de la ecuación característica variando la ganancia del controlador entre cero e infinito. La abscisa es la parte real de las raíces y la ordenada es la parte compleja.

Representar las raíces de la ecuación característica para un sistema de primer o segundo orden es sencillo, ya que se pueden obtener ecuaciones analíticas que relacionan la posición de las raíces con la ganancia del controlador. Para sistemas de orden superior es más complejo, como consecuencia se han desarrollado métodos gráficos y métodos numéricos para facilitar esta tarea.

💡 Ejemplo

En la primera parte del [Problema 8.10](#) se estudia la estabilidad de un bucle de control mediante la localización de las raíces de la ecuación característica.

Frecuentemente, la función de transferencia de lazo abierto generalizada ($G_c G_f G_p G_m$) se puede escribir como un producto de ganancias K por una fracción de polinomios $z(s)$ y $p(s)$. Buscando los ceros de cada uno de estos polinomios, se puede escribir:

$$G_c G_f G_p G_m = K \frac{z(s)}{p(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

donde z_i son los zeros y p_i son los polos de la función de lazo abierto ($G_c G_f G_p G_m$).

Para representar las raíces de la ecuación característica según la ganancia del controlador se pueden utilizar las siguientes reglas:

1. La representación de las raíces empieza ($K_c = 0$) en los polos de la función de transferencia de lazo abierto ($G_c G_f G_p G_m$)
2. La curva finaliza ($K_c = \infty$) en los ceros de $G_c G_f G_p G_m$. Si hay más polos que ceros, la curva tiende a infinito
3. El número de curvas es igual al orden del sistema y al de polos de $G_c G_f G_p G_m$
4. Las partes complejas de la curva siempre aparecen como complejos conjugados
5. El ángulo de las asíntotas de las curvas es igual a $\frac{\pm 180^\circ}{n-m}$ donde n es el número de polos de la función de transferencia de lazo abierto y m es el número de ceros

8.4 Análisis armónico de sistemas lineales. Diagramas de Bode

Esta técnica de análisis de estabilidad es completamente diferente a la de los dos apartados anteriores. También se la conoce como análisis de frecuencia.

Se basa en que cuando se introduce una señal sinusoidal en un sistema lineal se obtiene, tras un periodo transitorio, una respuesta sinusoidal de la misma frecuencia pero de amplitud diferente y desfasada. El análisis armónico estudia el desfase y la razón de amplitudes entre la entrada y la salida. Para un sistema de control por retroalimentación la razón de amplitudes (RA) nunca debe ser mayor de 1, ya que entonces se amplificaría la señal y el sistema se volvería inestable al retroalimentar la salida. El estudio del desfase es importante, ya que de cierta manera se puede considerar que da los mismos problemas que un retraso.

Para un sistema de primer orden con una entrada sinusoidal la razón de amplitudes será:

$$RA = \frac{K_p}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_p^2}}$$

como se puede deducir a partir de la Ecuación [4.5](#).

Debido a la importancia de conocer RA se ha desarrollado una técnica matemática para determinarlo a partir de la función de transferencia sin necesidad de tener que obtener la respuesta del sistema en tiempo real.

Hay que sustituir s por $i\omega$, ya que se trata de un número complejo, para poder expresar la función de transferencia como un número complejo del tipo $x + iy$:

$$G(i\omega) = \frac{K_p}{\tau_p i\omega + 1} = \frac{K_p}{1 + \tau_p^2 \omega^2} + i \left(-\frac{K_p \tau_p \omega}{1 + \omega^2 \tau_p^2} \right)$$

Para eliminar separar la parte real de la compleja, eliminar el número complejo i del denominador, ha sido necesario multiplicar y dividir por el conjugado del denominador.

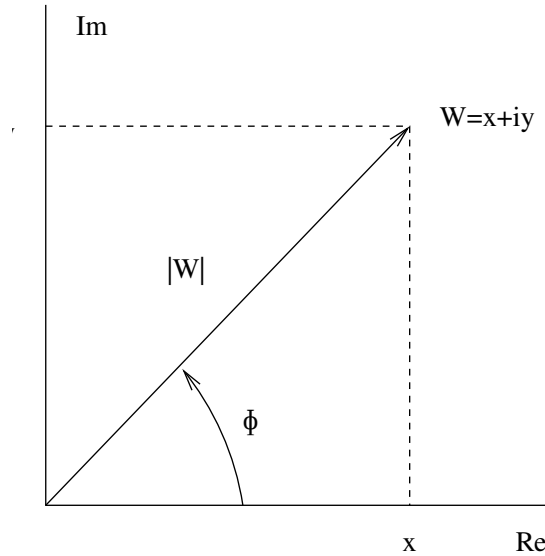


Figura 8.3: Representación del número complejo W en el plano complejo.

Cualquier número complejo W puede ser expresado, además de la manera habitual $x + iy$, como un módulo r y un argumento φ :

$$\begin{aligned} W &= x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi} \\ |W| &= r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \text{atan} \left(\frac{y}{x} \right) \end{aligned}$$

Por tanto, la función de transferencia se puede expresar en función de r y φ como:

$$G(i\omega) = \frac{K_p}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_p^2}} e^{i\varphi}$$

donde $\frac{K_p}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_p^2}}$ es la razón de amplitudes y φ es el desfase. De esta manera se logra obtener el desfase y la razón de amplitudes sin tener que obtener la respuesta en tiempo real para una entrada sinusoidal de amplitud M y frecuencia angular ω .

En general, sea un sistema de orden n con la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

donde $Q(s)$ y $P(s)$ son polinomios de orden m y n respectivamente y $m < n$. Se puede demostrar que:

1. La respuesta final, cuando $t \rightarrow \infty$, a una entrada sinusoidal de frecuencia angular ω es una sinusoidal de la misma frecuencia.
2. La razón de amplitudes (RA) es el módulo de $G(i\omega)$:

$$RA = |G(i\omega)|$$

La respuesta sinusoidal tendrá el siguiente desfase:

$$\varphi = \arg(G(i\omega))$$

A continuación se tratan con detalle algunos de los principales sistemas estudiados y se introducen los diagramas de Bode.

8.4.1 Sistemas lineales de primer orden

Para un sistema de primer orden de ganancia k y constante de tiempo τ :

$$\frac{RA}{k} = \frac{1}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}}$$

$$\varphi = \text{atan}(-\tau\omega)$$

Una manera conveniente de representar la razón de amplitudes y el desfase son los *diagramas de Bode*. Estos diagramas consisten en representar la razón de amplitudes frente a la frecuencia angular utilizando escalas logarítmicas y el desfase en una escala lineal frente a la frecuencia angular en una escala logarítmica. Si se desea utilizar solo escalas lineales hay que representar $\log RA$ y φ frente al $\log \omega$. A veces se representa la razón de amplitudes como decibelios:

$$\text{dB} = 20 \log RA$$

A menudo se representa en los diagramas de Bode $\frac{RA}{k}$ y $\tau\omega$ para obtener diagramas independientes del sistema.

```
PlutoPlotly.PlutoPlot(data: [
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis"
],
  layout: "layout with fields margin, showlegend, template, xaxis1, xaxis2, yaxis1, and yaxis2",
  Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}(), Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}())
```

Figura 8.4: Diagrama de Bode para un sistema de primer orden. ABF es la asíntota de baja frecuencia y AAF es la asíntota de alta frecuencia.

Para dibujar el diagrama de Bode de un sistema lineal de primer orden, se debe calcular el logaritmo de la razón de amplitudes:

$$\log\left(\frac{RA}{k}\right) = -\frac{1}{2}\log(1 + \tau^2\omega^2)$$

A partir del análisis de la Figura 8.4 se observa que:

1. La razón de amplitudes tiende a 1 cuando la frecuencia tiende a 0. Es decir:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{RA}{k} = 1 \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} \log \frac{RA}{k} = 0$$

Existe para bajas frecuencias una asíntota horizontal que para por el punto (1,1) de la gráfica de razón de amplitudes frente a la frecuencia, es la asíntota de baja frecuencia (ABF).

2. También existe una asíntota de alta frecuencia (AAF), $\log \frac{RA}{k} \approx -\log \tau\omega$. Es una recta de pendiente -1 que pasa por el punto (1,1). Este es el punto en el que la diferencia entre el valor de la asíntota y el de la curva es máxima.
3. A partir del estudio de la gráfica de desfase frente a frecuencia se observa que el desfase tiende a 0 cuando la frecuencia tiende a 0.
4. Si la frecuencia tiende a ∞ , el desfase tiende a -90° .
5. Si el desfase es de -45° , $\log \tau\omega = 0$.

8.4.2 Sistema lineal de segundo orden

Para un sistema lineal de 2 orden se puede demostrar que la razón de amplitudes y el desfase se expresan como:

$$RA = \frac{k}{\sqrt{(1 - \tau^2\omega^2)^2 + (2\zeta\tau\omega)^2}}$$

$$\varphi = \text{atan}\left(-\frac{2\zeta\tau\omega}{1 - \tau^2\omega^2}\right)$$

En este caso, de nuevo aparece una asíntota de bajas frecuencias:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{RA}{k} = 1$$

y una asíntota para altas frecuencias:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \log \frac{RA}{k} = -2 \log \tau\omega$$

A partir del análisis de las gráficas de la figura anterior se observa que el desfase máximo posible es de -180° . Existe un máximo en la razón de amplitudes, si el sistema es subamortiguado, cuando $\omega\tau = 1$:

$$\left(\frac{RA}{k}\right)_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\varphi_{\max} = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

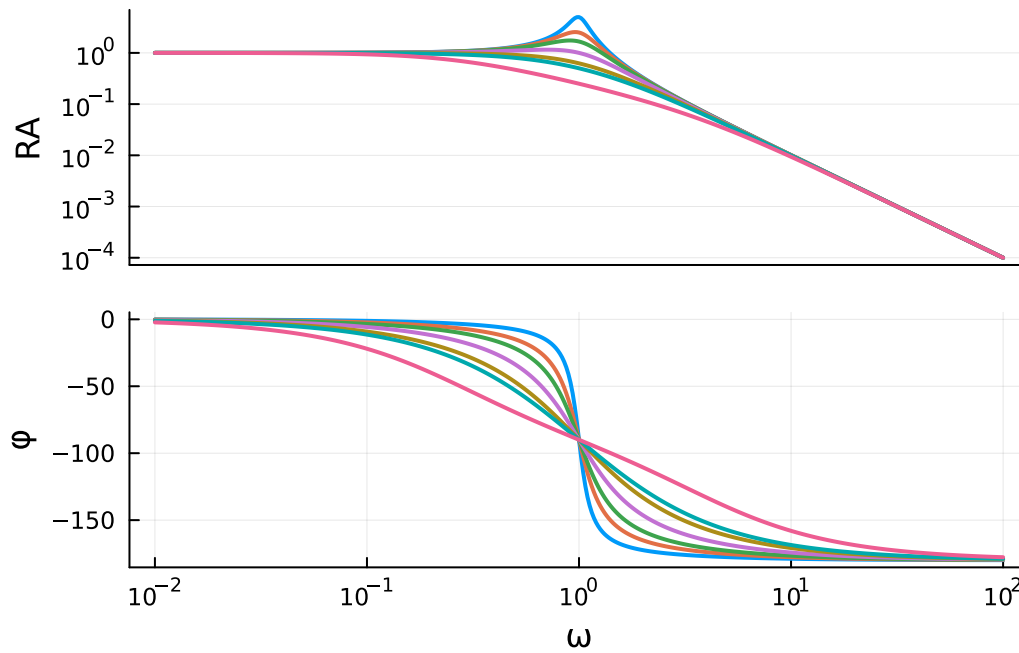


Figura 8.5: Diagramas de Bode para diferentes sistemas de 2° orden en función del coeficiente de amortiguamiento.

8.4.3 Retraso

En el caso del retraso la razón de amplitudes y el desfase son:

$$\begin{aligned} RA &= 1 \\ \varphi &= -t_d \omega \end{aligned}$$

donde t_d es el valor del retraso.

8.4.4 Controladores

A continuación se muestra para diferentes controladores las fórmulas utilizadas para la construcción de los diagramas de Bode.

8.4.4.1 Controlador proporcional

Para un controlador proporcional la razón de amplitudes es:

$$\begin{aligned} RA &= K_c \\ \varphi &= 0 \end{aligned}$$

8.4.4.2 Controlador proporcional+integral

Las ecuaciones necesarias para dibujar el diagrama de Bode de un controlador PI son:

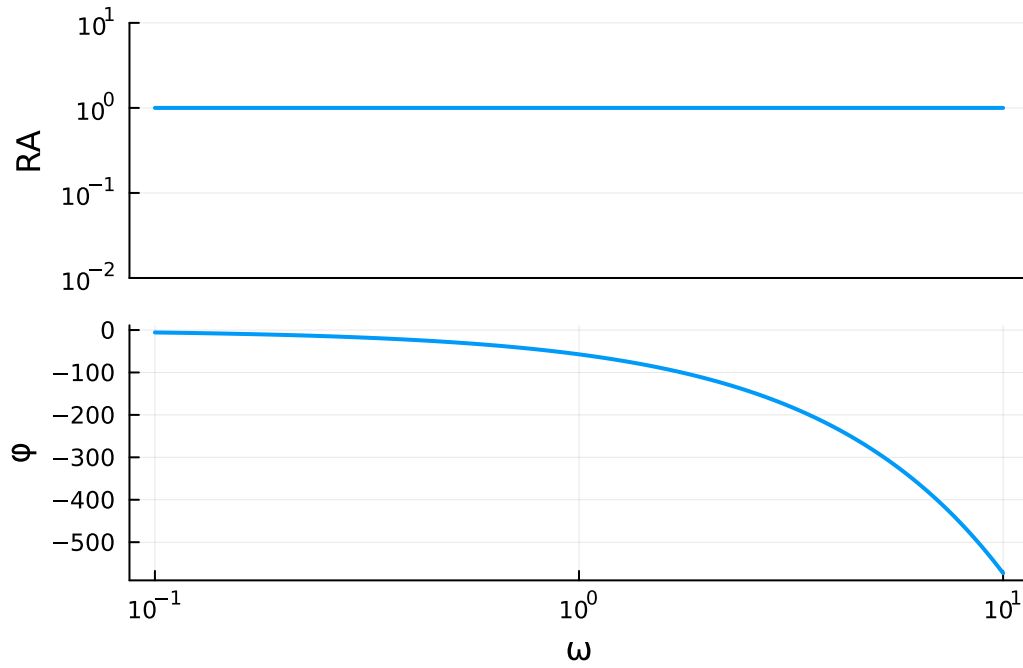


Figura 8.6: Diagrama de Bode para el retraso.

$$RA = K_c \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 \tau_I^2}}$$

$$\varphi = \text{atan} \left(-\frac{1}{\omega \tau_I} \right)$$

En este caso existe, de nuevo, una asíntota de baja frecuencia:

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{\omega^2 \tau_I^2} \gg 0 \Rightarrow \log \left(\frac{RA}{K_c} \right) \rightarrow -\log \omega \tau_I$$

y una asíntota de alta frecuencia:

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{\omega^2 \tau_I^2} \rightarrow 0 \Rightarrow \log \left(\frac{RA}{K_c} \right) \rightarrow 0$$

8.4.4.3 Controlador proporcional+derivativo

En el caso de utilizar un controlador PD:

$$RA = K_c \sqrt{1 + \tau_D^2 \omega^2}$$

$$\varphi = \text{atan} \tau_D \omega > 0$$

En este caso el desfase aparece adelantado a la entrada. De nuevo se comprueba que la acción derivativa se adelanta al comportamiento futuro de las perturbaciones.

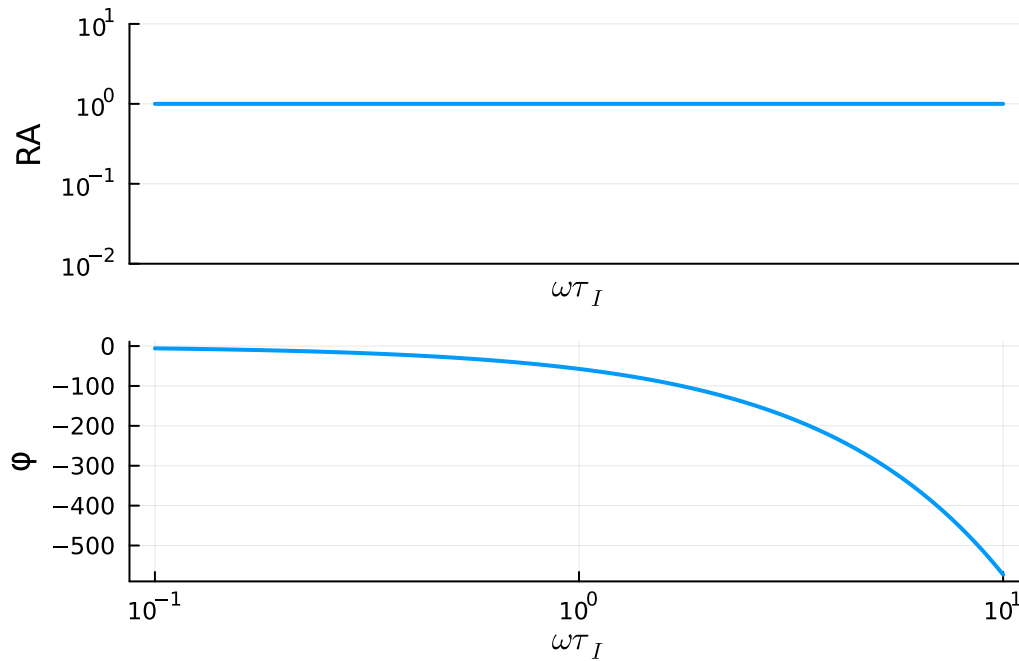


Figura 8.7: Diagrama de Bode para un controlador PI.

```

PlutoPlotly.PlutoPlot(data: [
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis"
])

layout: "layout with fields margin, showlegend, template, xaxis1, xaxis2, yaxis1, and yaxis2"
, Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}{()}, Dict{String, Vector{HypertextLiteral.Ja

```

Figura 8.8: Diagrama de Bode de un controlador PD.

8.4.4.4 Controlador proporcional+integral+derivativo

Para un controlador PID:

$$RA = K_d \sqrt{\left(\tau_D \omega - \frac{1}{\tau_I \omega}\right)^2 + 1}$$

$$\varphi = \text{atan} \left(\tau_D \omega - \frac{1}{\tau_I \omega} \right)$$

```
PlutoPlotly.PlutoPlot(data: [
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis"
],
  layout: "layout with fields margin, showlegend, template, xaxis1, xaxis2, yaxis1, and yaxis2"
, Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}(), Dict{String, Vector{HypertextLiteral.Ja
```

Figura 8.9: Diagrama de Bode para un controlador PID con $\tau_I = 10$ y $\tau_D = 0.1$.

8.4.5 Sistemas de varios componentes

Sea un sistema de n procesos en serie cuya dinámica venga descrita por las funciones de transferencia $G_1, G_2, \dots, G_n$. Su dinámica global vendrá descrita por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \dots G_n(s)$$

Se puede demostrar que la razón de amplitudes y el desfase global son:

$$RA = RA_1 RA_2 \dots RA_n = \prod_i RA_i$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = \sum_i \varphi_i$$

Por tanto,

$$\log RA = \log RA_1 + \log RA_2 + \dots + \log RA_n = \sum_i \log RA_i$$

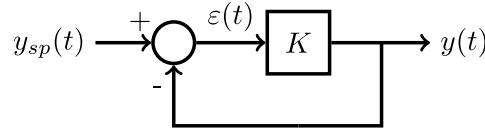


Figura 8.10: Bucle de retroalimentación con un controlador proporcional de ganancia unidad.

8.5 Criterio de estabilidad de Bode

Sea el sencillo bucle de retroalimentación de la Figura 8.10. La función de transferencia de lazo abierto de este bucle es:

$$G_{OL} = K$$

El criterio de estabilidad de Bode se basa en abrir el bucle e introducir una función sinusoidal para poder estudiar el comportamiento del sistema. En primer lugar se abre el bucle y se introduce una señal sinusoidal de amplitud M y frecuencia angular ω :

$$y_{sp}(t) = \varepsilon(t) = M \sin \omega t$$

Por tanto,

$$y(t) = KM \sin \omega t$$

ya que,

$$y(s) = G_{OL} y_{sp}(s)$$

Una vez introducida la señal sinusoidal se cierra el bucle y se devuelve la consigna a su valor inicial $y_{sp} = 0$. Entonces,

$$\varepsilon(t) = -KM \sin \omega t = KM \sin(\omega t - 180^\circ)$$

De esta manera se ha logrado atrapar la señal sinusoidal dentro del bucle de retroalimentación. Esta señal tiene un desfase de -180° y una amplitud que depende de la ganancia K . Se puede comprobar fácilmente que la razón de amplitudes de la función de la transferencia de lazo abierto (G_{OL}), entre la entrada $\varepsilon(t)$ y la salida $y(t)$, es K :

$$RA = \frac{\text{Amplitud de la respuesta}}{\text{Amplitud de la entrada}} = \frac{K^2 M}{KM} = K$$

Se puede comprobar de manera muy sencilla que si la razón de amplitudes de lazo abierto es superior a la unidad ($K > 1$) el sistema será inestable ya que para cada vuelta del bucle la señal se ve amplificada. Si $K = 1$, el sistema se encontrará al límite de la estabilidad. Si $RA < 1$, la respuesta del sistema global tenderá a cero cuando el tiempo tienda a infinito. Este razonamiento es la base del **criterio de estabilidad de Bode**:

! Importante

Un bucle de control por retroalimentación es inestable si la razón de amplitudes de su función de transferencia de lazo abierto es mayor que la unidad en la frecuencia de cruce ω_{co} (*crossover frequency*), aquella que hace que el desfase sea -180° .

Para aplicar el criterio de Bode es necesario disponer de los diagramas de Bode de la función de transferencia de lazo abierto del bucle. Estos diagramas se pueden construir:

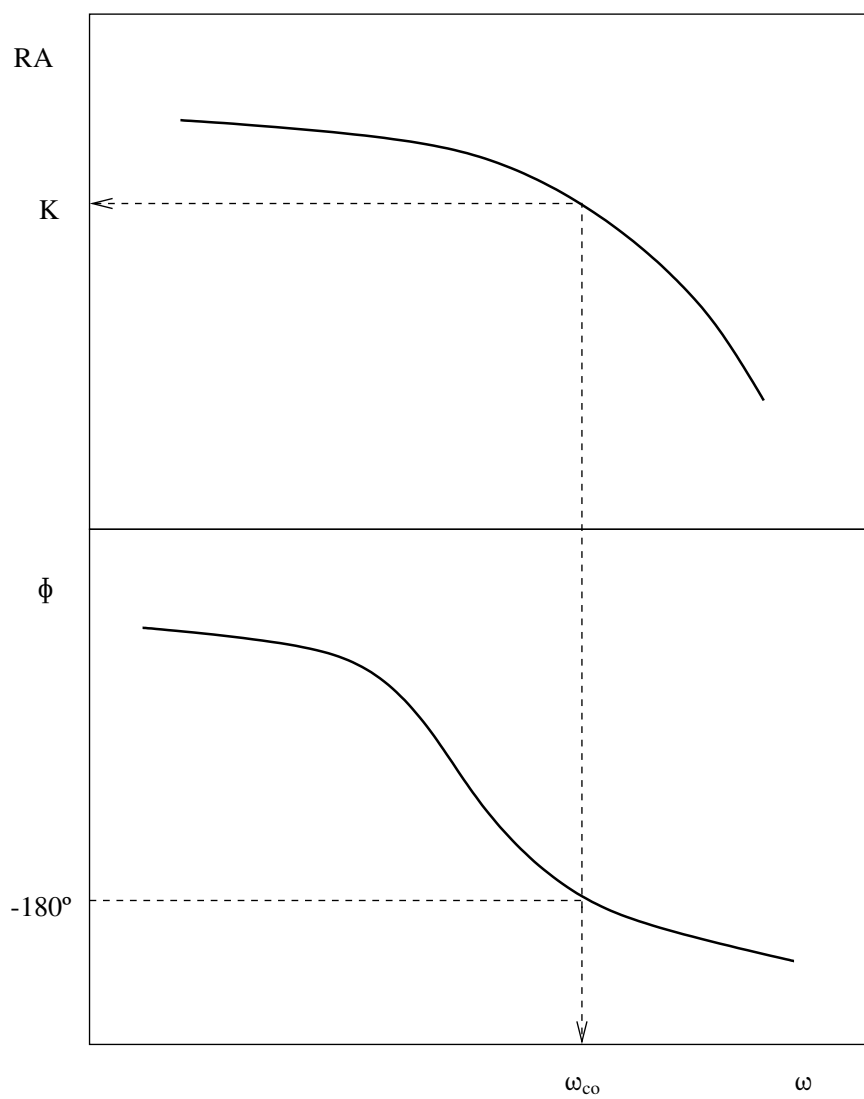


Figura 8.11: Aplicación del criterio de estabilidad de Bode. Según el valor de K la respuesta de lazo cerrado será o no estable.

1. Numéricamente: Conociendo las funciones de transferencia de todos los elementos del bucle.
2. Experimentalmente, en el caso de que todas o alguna de las funciones de transferencia sea desconocida: Para ello se abre el lazo de control y se introducen señales sinusoidales de distintas frecuencias mientras se registran las amplitudes y desfase de las señales sinusoidales de salida. Con esos datos se puede construir el diagrama de Bode.

Tal como se ha visto el criterio de estabilidad de Bode se puede utilizar para sistemas intratables con las técnicas anteriores:

1. Sistemas con función de transferencia compleja
2. Sistemas de los que no se conoce la función de transferencias.

Además proporciona más información para realizar una correcta sintonía del controlador. Aunque también existen sistemas para los que no es aplicable el criterio de estabilidad de Bode.

8.5.1 Márgenes de ganancia y de fase

El criterio de estabilidad de Bode indica cómo establecer un método racional de sintonía de sistemas de control por retroalimentación para evitar situaciones de inestabilidad.

Para aplicar el criterio de estabilidad hay que dibujar los diagramas de Bode de la función de transferencia de lazo abierto. En el diagrama se consideran dos puntos críticos según el criterio de Bode ($RA = 1$ y $\varphi = -180^\circ$).

Según la Figura 8.12, M es la razón de amplitudes para la frecuencia de cruce. Según el criterio de Bode, M debe ser menor o igual a 1 para que el sistema sea estable.

Se puede definir:

$$\text{Margen de ganancia} = \frac{1}{M}$$

Lógicamente debe tomar valores por encima de la unidad para que el sistema sea estable.

El margen de ganancia es una medida importante del sistema ya que:

1. Constituye una medida de la proximidad del sistema de la zona de inestabilidad.
2. Cuanto mayor de la unidad sea el margen de ganancia, más seguro será el sistema controlado.
3. Normalmente se diseñan los controladores para que el margen de ganancia sea mayor de 1.7. Es decir, la razón de amplitudes puede crecer 1.7 veces antes de que el sistema se vuelva inestable. Aunque en el caso de trabajar con procesos muy conocidos puede ser suficiente seleccionar un margen de ganancia entre 1.4 y 1.7. Si los parámetros del sistema son poco conocidos, se recomienda un factor de seguridad entre 1.7 y 3.0.

Además del margen de ganancia se puede establecer otro factor de seguridad:

$$\text{Margen de fase} = 180^\circ - |\varphi_{(1)}|$$

donde $\varphi_{(1)}$ es el desfase para $RA = 1$. El margen de fase representa en cuanto hay que aumentar el desfase para inestabilizar el sistema. Se recomienda normalmente valores mayores de 30.

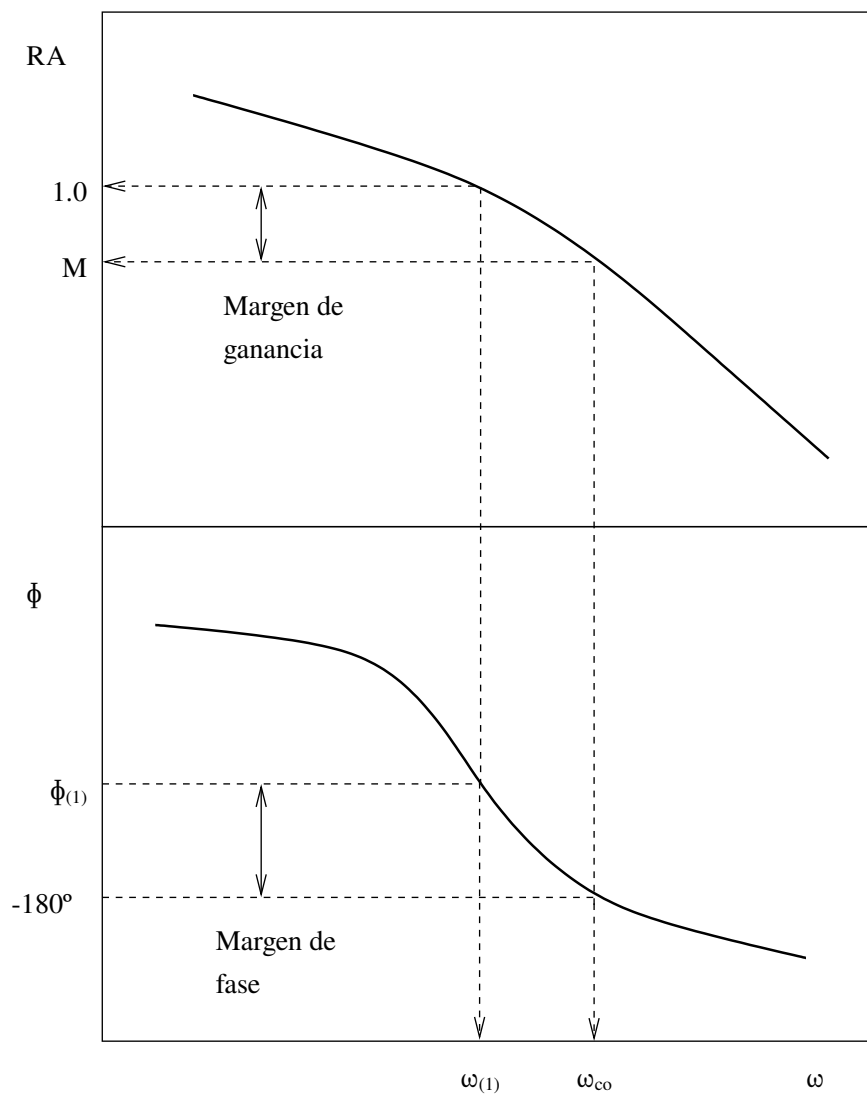


Figura 8.12: Representación gráfica del margen de ganancia y de fase.

8.6 Criterio de estabilidad de Nyquist

El criterio de estabilidad de Nyquist es una alternativa a los diagramas de Bode para realizar el análisis de estabilidad de procesos. El diagrama de Nyquist contiene la misma información que los de Bode, por lo que su construcción es sencilla a partir de éstos, pero puede tratar sistemas para los que no es aplicable el criterio de estabilidad de Bode.

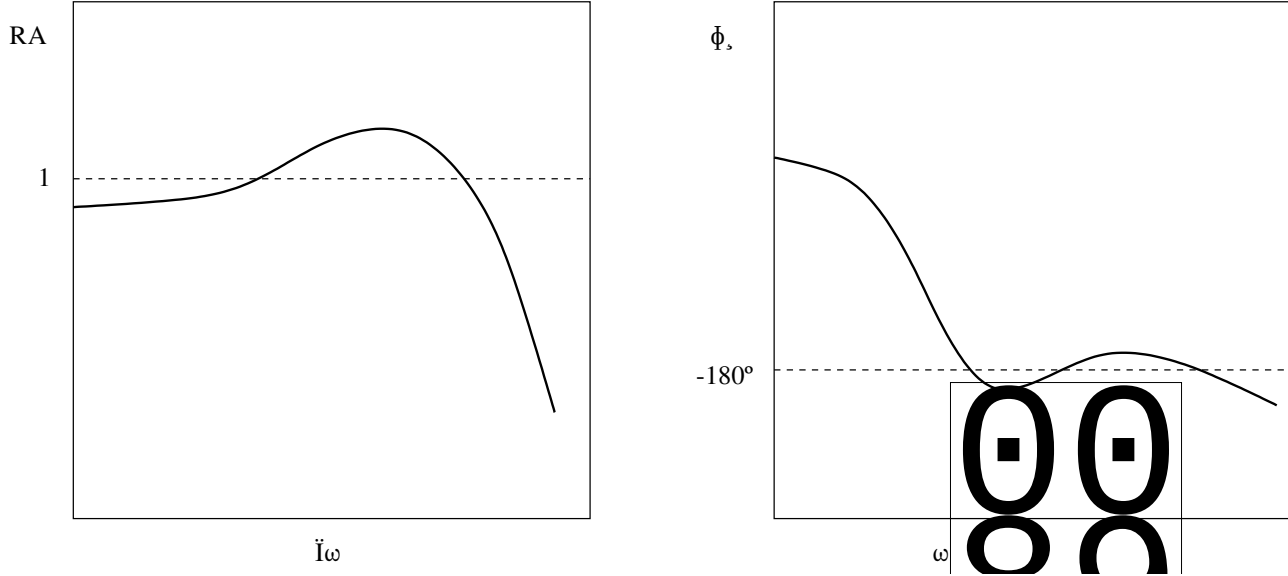


Figura 8.13: Sistemas para los que el criterio de estabilidad de Bode no es aplicable.

Para dibujar el diagrama de Nyquist se representa $\text{Im}[G(i\omega)]$ en ordenadas y $\text{Re}[G(i\omega)]$ en abscisas.

Para el punto 1 de la Figura 8.14, definido por su frecuencia ω_1 , se puede observar que:

1. La distancia entre el punto 1 y el (0,0) es:

$$\text{distancia} = \sqrt{\{\text{Re}[G(i\omega)]\}^2 + \{\text{Im}[G(i\omega)]\}^2} = |G(i\omega)| = \text{Re}$$

2. El ángulo φ de la figura es el desfase para la frecuencia ω_1 :

$$\varphi = \text{atan} \frac{\text{Im}[G(i\omega)]}{\text{Re}[G(i\omega)]} = \arg G(i\omega) = \text{desfase}$$

Para trazar el diagrama de Nyquist se debe variar la frecuencia entre 0 y ∞ para encontrar la RA y φ y, a continuación, representarlos en el plano complejo. Una vez trazado el diagrama se aplica el *criterio de estabilidad de Nyquist* (Figura 8.15):

Si la curva de Nyquist de lazo abierto de un sistema de retroalimentación envuelve el punto (-1,0) para frecuencias ω desde $-\infty$ hasta ∞ , la respuesta de lazo cerrado será inestable.

El diagrama de Nyquist se puede construir a partir del diagrama de Bode. Ambos diagramas contienen la misma información. El margen de fase y el margen de ganancia también se pueden evaluar en el diagrama de Nyquist.

El punto A de la Figura 8.16 es aquel cuya frecuencia hace que RA sea 1, de manera que φ_{MF} representa el margen de fases. El punto B tiene un desfase de -180° , de manera que su RA es M . Por tanto, el margen de ganancias es $\frac{1}{M}$.

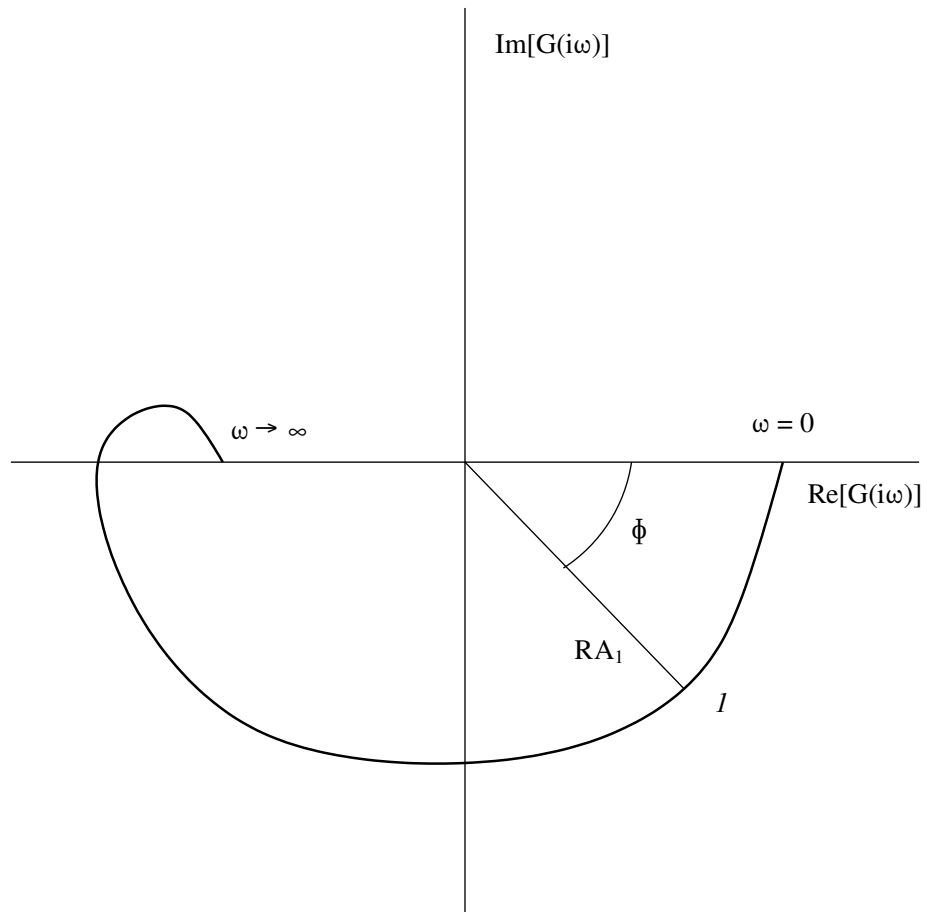


Figura 8.14: Curva de Nyquist de un proceso. El punto 1 viene definido por una frecuencia ω .

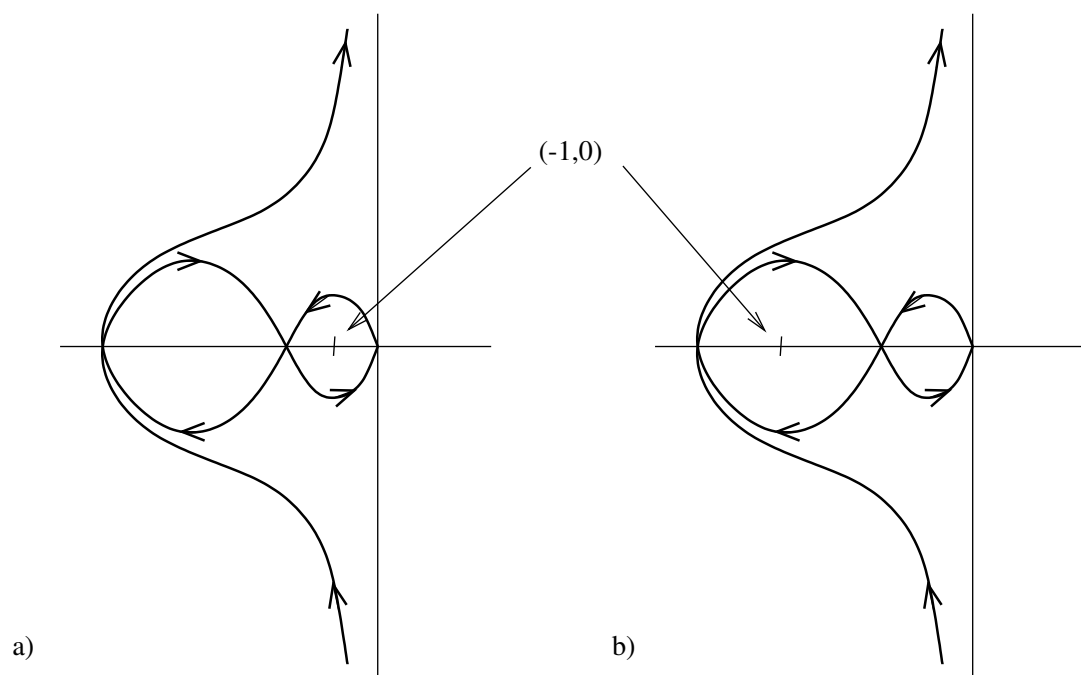


Figura 8.15: Curva de Nyquist para dos lazos abiertos. a) Sistema estable, b) Sistema inestable.

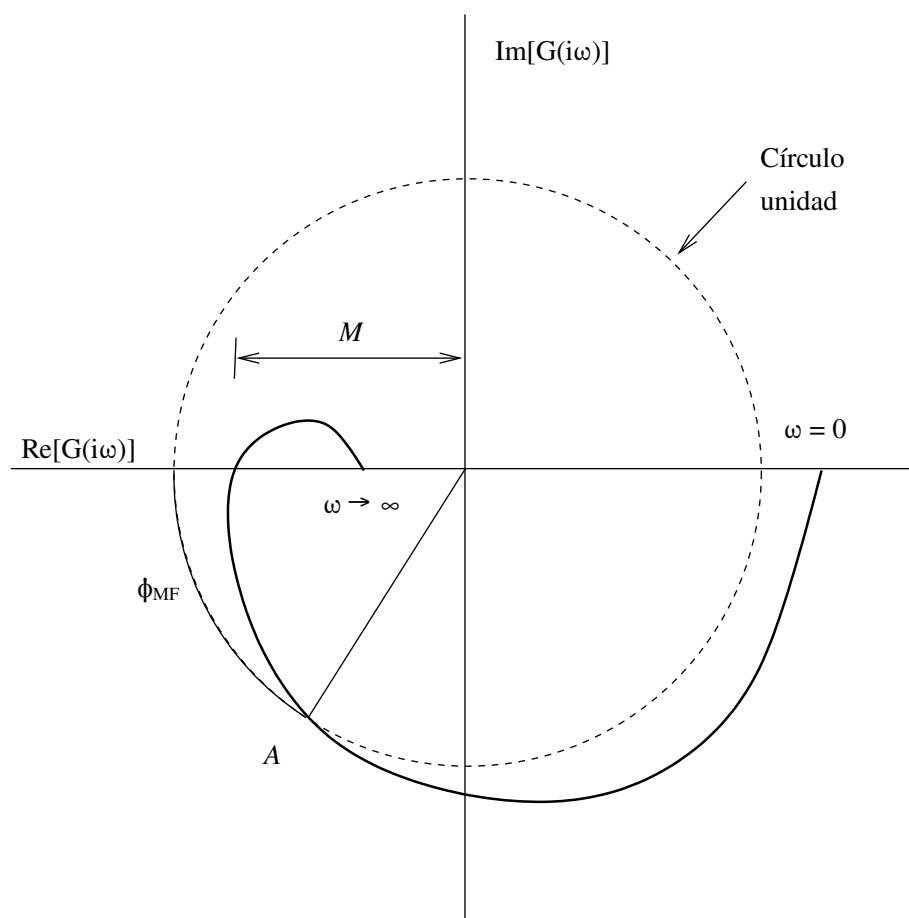


Figura 8.16: Obtención del margen de ganancia y de fase a partir de la curva de Nyquist.

8.7 Problemas

Problema 8.1

Estimar la estabilidad de un sistema de control automático cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$GH = \frac{9}{(10s + 1)^3}$$

💡 Solución

Para determinar si el lazo de control es estable se puede utilizar el criterio de Routh. La ecuación característica de este sistema es:

$$\begin{aligned}1 + GH &= 0 \\1 + \frac{9}{(10s + 1)^3} &= 0 \\1000s^3 + 300s^2 + 30s + 10 &= 0\end{aligned}$$

La matriz de Routh es:

$$\begin{array}{cc}1000 & 30 \\300 & 10 \\-3.33 & \end{array}$$

La primera columna tiene un signo negativo, lo que implica que el sistema es inestable.

Problema 8.2

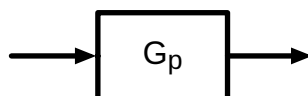
Considérese un proceso de segundo orden cuya función de transferencia es:

$$G_p = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

- ¿Es estable dicho proceso?
- Si el proceso se encuentra en un lazo de control, con un controlador PI ($K_c = 100$, $\tau_I = 0.1$), siendo las funciones de transferencia de los elementos medidor y final de control $H = G_v = 1$, ¿es estable dicho conjunto? (Puede aplicarse el criterio de Routh-Hurwitz)
- Hacer el análisis de estabilidad de este sistema de lazo de control en función de K_c y τ_I .

💡 Solución

a) El diagrama de bloques de este proceso es:



La ecuación característica de este sistema será el numerador de la función de transferencia, ya que el sistema será estable siempre que sus raíces tengan la parte real negativa:

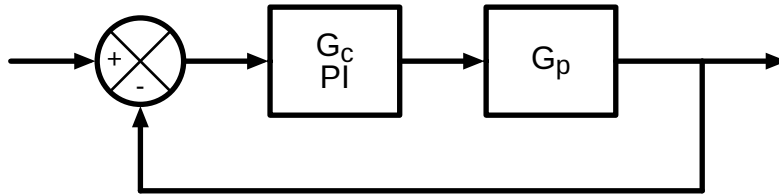
$$s^2 + s + 1 = 0$$

Para comprobar la estabilidad del proceso se puede aplicar el método de Routh-Hurwitz. La matriz de Routh es:

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & \\ 1 = \frac{(2)(1)}{2} & \end{array}$$

Todos los elementos de la primera columna son positivos, por tanto, el sistema es estable.

b) Al existir un controlador por retroalimentación, el diagrama de bloques pasa a ser:



En este caso la ecuación característica es:

$$1 + G_c G_p = 0$$

Sustituyendo las funciones de transferencia se obtiene:

$$1 + 100 \left(1 + \frac{1}{0.1s} \right) \frac{1}{s^2 + s + 1} = 0$$

Operando se encuentra que:

$$\frac{s^3 + s^2 + 101s + 1000}{s^3 + s^2 + s} = 0$$

Por tanto:

$$s^3 + s^2 + 101s + 1000 = 0$$

La matriz de Routh será:

$$\begin{array}{cc} 1 & 101 \\ 1 & 1000 \\ -899 & \end{array}$$

El sistema es inestable ya que uno de los elementos de la primera columna tiene signo negativo.

c) La ecuación característica en este caso es:

$$1 + K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) \frac{1}{s^2 + s + 1} = 0$$

Operando se encuentra que:

$$\frac{\tau_I s^3 + \tau_I s^2 + (K_c + 1)\tau_I s + K_c}{\tau_I s^3 + \tau_I s^2 + \tau_I s} = 0$$

Por tanto,

$$\tau_I s^3 + \tau_I s^2 + (K_c + 1)\tau_I s + K_c = 0$$

La matriz de Routh es:

$$\begin{array}{cc} \tau_I & (K_c + 1)\tau_I \\ \tau_I & K_c \\ \frac{\tau_I^2(K_c + 1) - \tau_I K_c}{\tau_I} & \end{array}$$

Para que el sistema sea estable todos los elementos de la primera columna deben ser positivos, lo que implica que:

$$\tau_I > 0$$

$$\tau_I(K_c + 1) - K_c > 0$$

La constante de tiempo integral y la ganancia del controlador son, por definición, positivas. Resolviendo la inecuación se encuentra que para que el sistema sea positivo se tiene que cumplir la condición:

$$\tau_I > -\frac{K_c}{K_c + 1}$$

o la condición:

$$K_c > \frac{\tau_I}{\tau_I - 1}$$

Problema 8.3

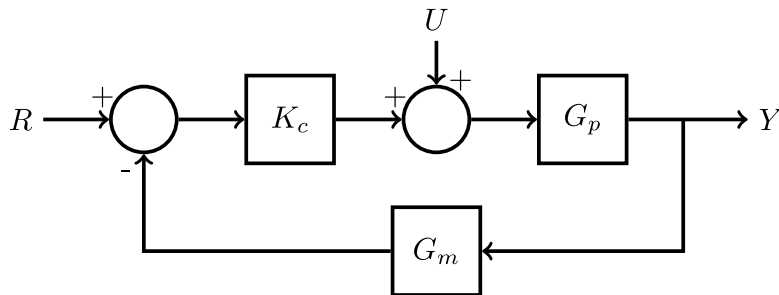
Un sistema tiene una dinámica cuya ecuación característica es:

$$s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 4s + 2 = 0$$

Determinar su estabilidad mediante el criterio de Routh.

Problema 8.4

Sea el sistema de control de tercer orden de la figura:



donde:

$$G_p = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$G_m = \frac{1}{\tau_3 s + 1}$$

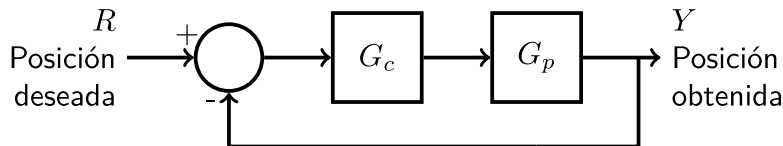
Si $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1/2$ y $\tau_3 = 1/3$, determinar los valores de K_c para los que el sistema de control es estable.

Problema 8.5

Un sistema formado por dos tanques en serie independientes se regula por un control PID. Las constantes de tiempo de los tanques son 20 y 10 min, mientras que las del elemento de medida de nivel es de 30 segundos. El tiempo integral es de 3 min y el derivativo 40 s. Determinar el intervalo de valores de K_c para los que el lazo de control es estable.

Problema 8.6

En la actualidad todavía se emplean discos duros en algunos ordenadores para almacenar la información. Un cabezal de lectura se desplaza sobre el disco giratorio a las posiciones requeridas en las operaciones de lectura o grabación de información. Este desplazamiento ha de ser rápido y preciso. En la figura adjunta se presenta el diagrama de bloques del sistema de desplazamiento del cabezal de lectura.



donde:

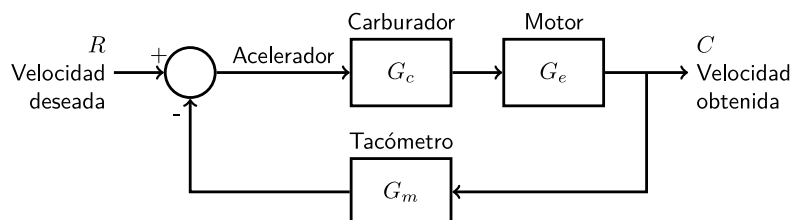
$$G_c = \frac{K(s+a)}{s+1}$$

$$G_p = \frac{1}{s(s+2)(s+3)}$$

Determinar los intervalos de estabilidad de K y a . ¿Qué valores podría tomar a para $K = 40$?

Problema 8.7

En la figura se representa el diagrama de bloques de un sistema de control de velocidad de un motor de gasolina:



donde:

$$G_c = \frac{1}{\tau_I s + 1}$$

$$G_e = \frac{K}{\tau_e s + 1}$$

$$G_m = \frac{1}{\tau_m s + 1}$$

τ_i es la constante de tiempo del carburador, igual a 1; τ_e es la del motor, igual a 4 segundos; y τ_m es la del medidor de velocidad, igual a 0.5 s. Determinar:

- El valor de la ganancia K del motor para que, ante una variación M en la consigna, la velocidad obtenida no difiera respecto a la consigna en más de un 7 % de dicha variación M .
- La estabilidad del sistema.
- El margen de la ganancia K determinada en el primer apartado.

Solución

- En este apartado se propone un cambio en la consigna consistente en un escalón de altura M :

$$R(s) = \frac{M}{s}$$

La función de transferencia que describe la dinámica de este lazo de control para un cambio en la consigna es:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{s+1} \frac{K}{4s+1}}{1 + \frac{1}{s+1} \frac{K}{4s+1} \frac{1}{0.5s+1}} = \frac{Ks + 2K}{4s^3 + 13s^2 + 11s + 2K + 2}$$

La velocidad estacionaria obtenida será:

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sG(s)R(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{Ks + 2K}{4s^3 + 13s^2 + 11s + 2K + 2} \frac{M}{s} \right] = \frac{KM}{K + 1}$$

Se desea que la diferencia entre la velocidad obtenida y la deseada no difiera en más de un 7% de M . En este caso se considerará el caso límite de que la diferencia sea de un 7% de M . Por tanto:

$$\frac{KM}{K + 1} = (1 - 0.07)M$$

Es decir,

$$K = 13.28$$

- Para determinar la estabilidad del sistema se puede recurrir al método de Routh-Hurwitz ya que el sistema es lineal. La ecuación característica de este lazo de control se puede obtener a partir del denominador de la Ecuación 8.1 y es:

$$4s^3 + 13s^2 + 11s + 2K + 2 = 0$$

También se puede obtener la ecuación característica a partir de:

$$1 + G_{OL} = 1 + \frac{1}{s+1} \frac{K}{4s+1} \frac{1}{0.5s+1} = 0$$

Una vez encontrada la ecuación característica hay que construir la matriz de Routh-Hurwitz:

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 13 & 2K+2 \\ \frac{13 \cdot 11 - 4(2K+2)}{13} = -\frac{8K-135}{11} & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el lazo de control será estable si:

$$-\frac{8K-135}{11} \geq 0$$

Resolviendo la inecuación se encuentra que el lazo de control será estable si:

$$K \leq \frac{135}{8} = 16.875$$

c) La ganancia límite K_u para la que el lazo de control todavía es estable es:

$$K_u = 16.875$$

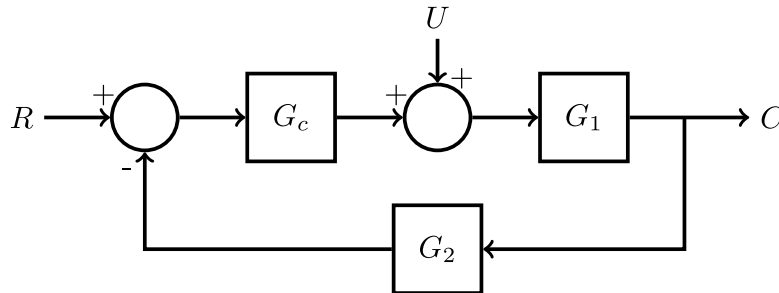
Por tanto, el margen de la ganancia K será:

$$MG = \frac{K_u}{K} = \frac{16.875}{13.28} = 1.271$$

Lo que significa que la ganancia K puede aumentar hasta un 27.1% y el lazo de control continuará siendo estable.

Problema 8.8

Sea el sistema de control representado en la figura:



donde $G_c = K_c$, $G_1 = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$ y $G_2 = \frac{1}{\tau_3 s + 1}$.

- Calcular el error permanente de la respuesta del sistema si se produce una carga (U) en escalón unidad.
- Si $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = \frac{1}{2}$ y $\tau_3 = \frac{1}{3}$, ¿para qué valores de ganancia K_c es estable el sistema?
- Si se sustituyera el control proporcional por un control PI, siendo $K_c = 5$ y $\tau_I = 0.25$, ¿sería estable el sistema?

💡 Solución

- La función de transferencia para un cambio en la carga es:

$$\frac{C}{U} = \frac{G_1}{1 + G_c G_1 G_2} = \frac{\tau_3 s + 1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1) + K_c}$$

El error permanente para un cambio en la carga en escalón unidad será:

$$\text{offset} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(sR - s \frac{C}{U} U \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s0 - s \frac{C}{U} \frac{1}{s} \right) = -\frac{1}{1 + K_c}$$

b) La ecuación característica de este lazo de control es:

$$1 + G_c G_1 G_2 = 0$$

Obviamente, la parte derecha de la ecuación característica coincide con el denominador de la función de transferencia encontrada en el apartado a). Por tanto,

$$(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1) + K_c = 0$$

Sustituyendo se encuentra:

$$0.1667s^3 + s^2 + 1.833s + 1 + K_c = 0$$

Para buscar para qué valores de K_c el sistema es estable se puede recurrir al criterio de Routh-Hurwitz. La matriz de Routh es:

$$\begin{array}{cc} 0.1667 & 1.833 \\ 1 & 1 + K_c \\ 1.666 - 0.1667K_c & \end{array}$$

Para que el sistema sea estable:

$$1.666 - 0.1667K_c > 0$$

Lo que supone que el sistema será estable para ganancias proporcionales que cumplan la siguiente condición:

$$0 < K_c < 9.994$$

c) Si el controlador proporcional se sustituye por un controlador PI con ganancia $K_c = 5$ y $\tau_I = 0.25$, la nueva ecuación característica será:

$$1 + 5 \left(1 + \frac{1}{0.25s} \right) \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \frac{1}{\tau_3 s + 1} = 0$$

Sustituyendo y operando se obtiene:

$$4.1667 \cdot 10^{-2} s^4 + 0.20833s^3 + 0.375s^2 + 1.625s + 5 = 0$$

La matriz de Routh es:

$$\begin{array}{ccc} 4.1667 \cdot 10^{-2} & 0.375 & 5 \\ 0.20833 & 1.625 & \\ 4.9992 \cdot 10^{-2} & 5 & \\ -19.211 & & \end{array}$$

En la primera columna de la matriz hay un elemento negativo, lo que implica que el nuevo lazo de control es inestable.

Problema 8.9

Dibujar el lugar de las raíces para un sistema cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$G_c G_f G_p G_m = \frac{K(s+1)}{s(s+2)}$$

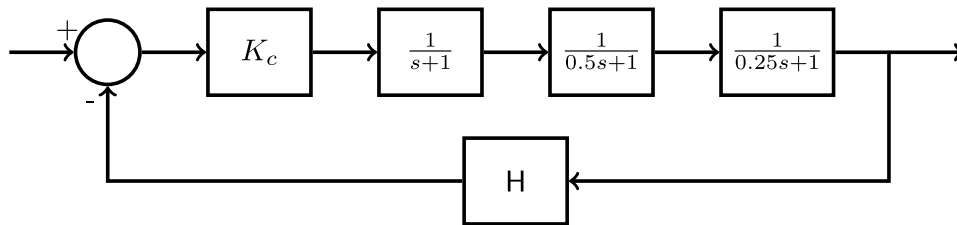
Problema 8.10

Trazar el lugar de las raíces para el control proporcional de un sistema de tres etapas con constantes de tiempo 1, 0.5 y 0.25 min, ganancia de proceso $K_p = 1$ y medidor $H = 1$. Determinar la estabilidad para los valores de K_c siguientes: 0.1, 10 y 15. ¿Qué valores tendrán el margen de ganancia y de fase para cada uno de esos tres casos?

💡 Solución

Gráfico del lugar de las raíces

El lazo de control propuesto es:



Por tanto, su ecuación característica es:

$$1 + K_c \frac{1}{s+1} \frac{1}{0.5s+1} \frac{1}{0.25s+1} = 0$$

Operando se encuentra:

$$0.125s^3 + 0.875s^2 + 1.75s + 1 + K_c = 0$$

Para dibujar el lugar de las raíces hay que encontrar las raíces de la ecuación anterior para diferentes valores de K_c y representarlas en el plano complejo.

Empezaremos cargando las librerías necesarias y creando las variables que utilizaremos:

```
using SymPy, Plots
```

```
#plotly()
```

```
@syms s, t::real, Kc::real=>"K_c"
```

```
(s, t, K_c)
```

Tal como se indicaba más arriba, la función de lazo abierto es:

```
Gol_s = Kc*1/(s+1)*1/(.5s+1)*1/(.25s+1)
```

```

$$\frac{K_c}{(0.25s+1)(0.5s+1)(s+1)}$$

```

Las raíces de la ecuación característica en función de K_c , un polinomio de tercer grado tiene solución analítica:

```
r1 = solve(1+Gol_s, s)
```

$$\begin{bmatrix} -1.5874010519682(-0.5-0.866025403784439i)\sqrt[3]{K_c+((K_c+0.0925925925925926)^2-0.0294067215363512)^{0.5}+0.0925925925925926-2.333333333333333} \\ -1.5874010519682(-0.5+0.866025403784439i)\sqrt[3]{K_c+((K_c+0.0925925925925926)^2-0.0294067215363512)^{0.5}+0.0925925925925926-2.333333333333333} \\ -1.5874010519682\sqrt[3]{K_c+((K_c+0.0925925925925926)^2-0.0294067215363512)^{0.5}+0.0925925925925926-2.333333333333333} \end{bmatrix}$$

Para poder trabajar con la función de una manera más sencilla, vamos a convertirla en una función de Julia:

```
raiz = lambdify(rl)
```

```
#155 (generic function with 1 method)
```

Comprobamos que funciona calculando las raíces para $K_c = 3$:

```
raiz(3)
```

```
3-element Vector{Number}:
```

```
-0.7432742592131494 + 2.2916217498187774im
-0.7432742592131494 - 2.2916217498187774im
-5.513451481573702
```

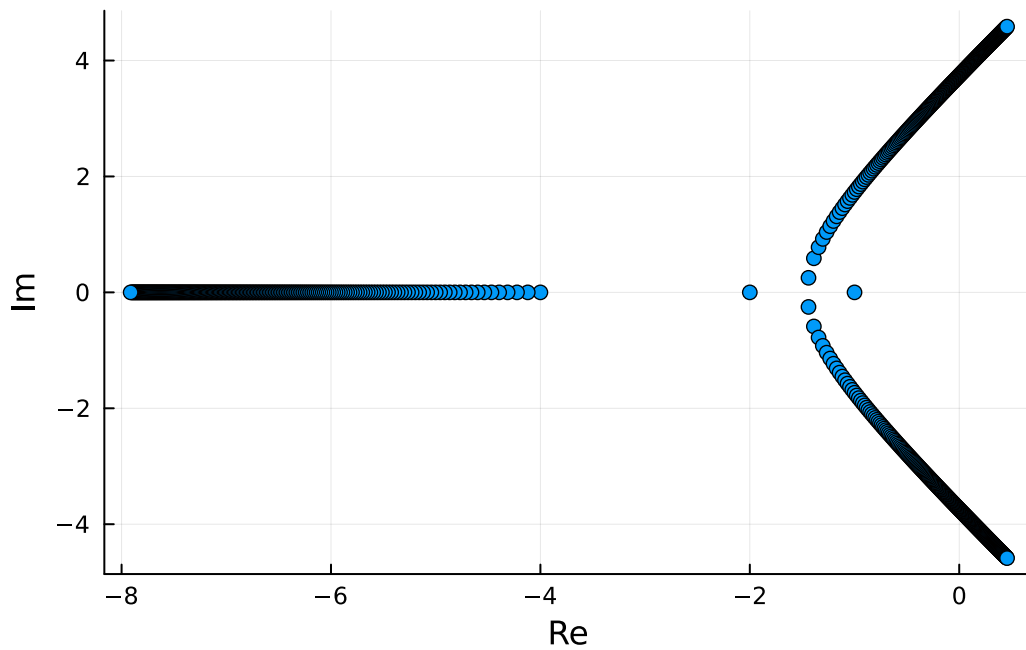
Dibujaremos las raíces de la ecuación característica para valores de K_c entre 0 y 20:

```
# Definimos los valores de Kc para los que representaremos el lugar
# de las raíces
K = range(0, 20, step=.1)
lreal = []
limag = []

# Para evitar que se produzca un error en la línea de más abajo:
# root = raiz(Complex(k))
# https://discourse.julialang.org/t/how-to-extend-cube-root-to-complex-numbers/42509/5
Base.cbrt(z::Complex) = cbrt(abs(z)) * cis(angle(z)/3)

# En este bucle, en primer lugar encontramos las raíces para
# cada valor de Kc
# En el segundo
for k in K
    root = raiz(Complex(k))
    for i in root
        push!(lreal, real(i))
        push!(limag, imag(i))
    end
end

scatter(lreal, limag, legend=false, xlabel="Re", ylabel="Im")
```



Dibujar el gráfico del lugar de las raíces no es complicado, pero sí es un poco laborioso. Una opción más simple, es utilizar la biblioteca `ControlSystems.jl`, que dibuja el lugar de las raíces utilizando métodos numéricos:

```
using ControlSystems
```

```
# Definimos la variable s
```

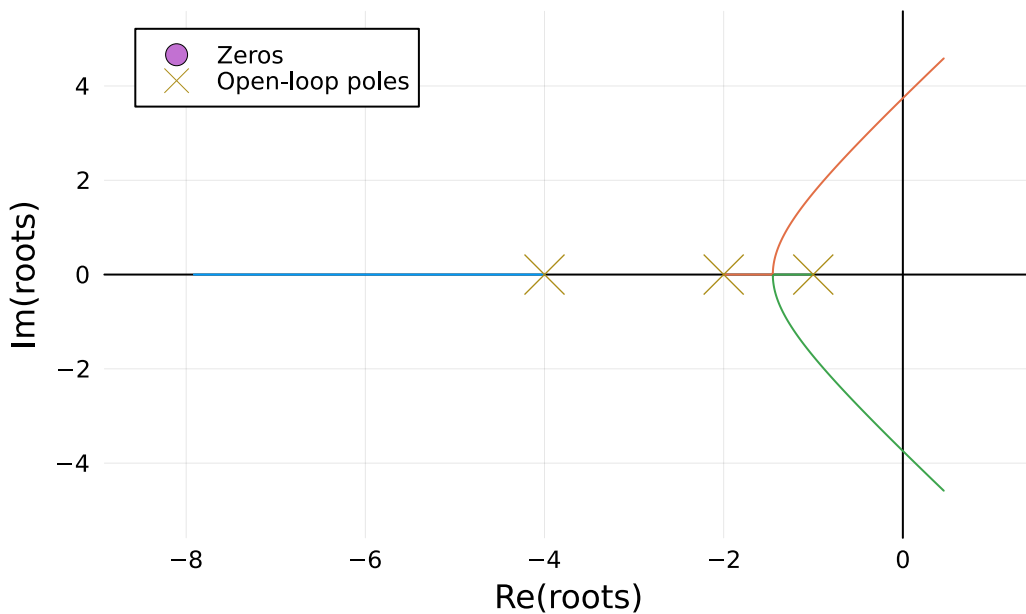
```
s = tf("s")
```

```
# Representación del lugar de las raíces para Gol para
```

```
# valores de Kc entre 0 y 20
```

```
plot(rlocus(1/(s+1)*1/(.5s+1)*1/(.25s+1), K=20))
```

Root locus



Pasando el ratón sobre las curvas, se puede leer los valores de las raíces y el valor de la ganancia del controlador:

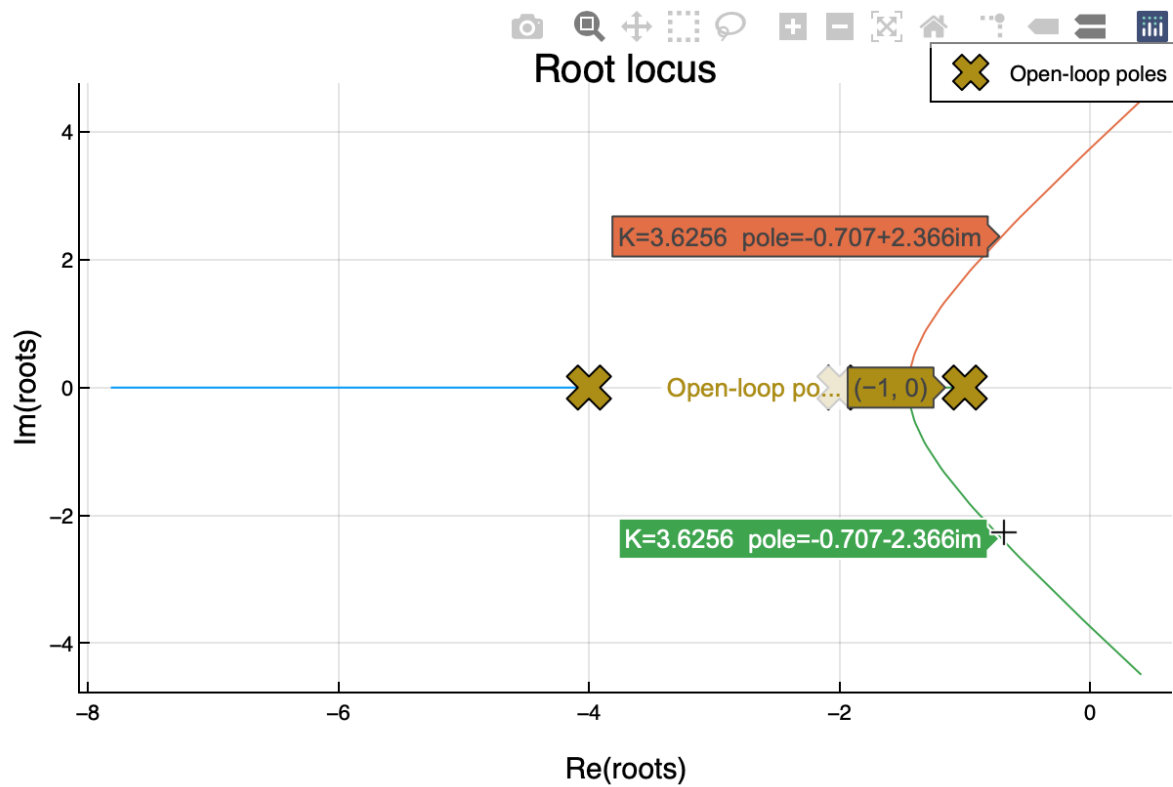


Figura 8.17: Valores de las raíces en función de K_c

Estudio de estabilidad para los valores de K_c siguientes: 0.01, 10 y 15

Resolviendo la ecuación característica se puede construir la siguiente tabla:

K_c	raíces
0.01	-1.959 - 0.0im
	-1.028 + 0.0im
	-4.013 + 0.0im
10.0	-0.082 + 3.587im
	-0.082 - 3.587im
	-6.835 + 0.0im
15.0	0.217 + 4.144im
	0.217 - 4.144im
	-7.433 + 0.0im

Se comprueba que dos de las raíces para $K_c = 10$ tienen la parte real positiva.

A partir del gráfico del lugar de las raíces también se podría haber obtenido la tabla anterior.

Margen de ganancia y de fase

Al conocer la ganancia última del controlador proporcional ($K_u = 11.3$), el cálculo del margen de ganancia resulta trivial:

$$MG = \frac{K_u}{K_c}$$

Por tanto:

K_c	MG
0.01	1130
10	1.13
15	0.753

También se puede calcular el margen de ganancia mediante análisis de frecuencia. Para ello hay que conocer la razón de amplitudes y el desfase de la función de transferencia de lazo abierto:

$$RA_{OL} = K_c \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{0.5^2 \omega^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{0.25^2 \omega^2 + 1}}$$

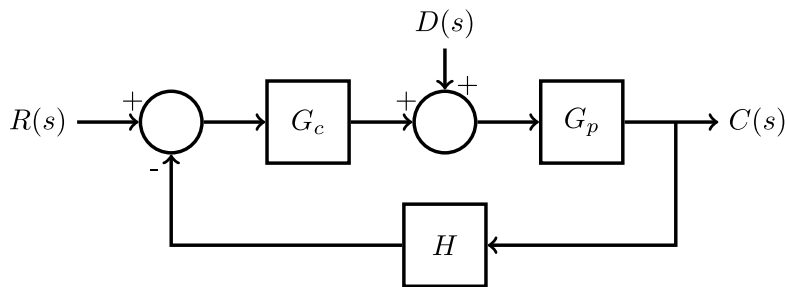
$$\varphi_{OL} = \text{atan}(-\omega) + \text{atan}(-0.5\omega) + \text{atan}(-0.25\omega)$$

En primer lugar hay que encontrar la frecuencia de cruce ($\varphi_{OL}(\omega_{co}) = -\pi$). Tras resolver la ecuación se obtiene que $\omega_{co} = 3.74$ rad/min. Sustituyendo en la razón de amplitudes y fijando el límite de estabilidad ($RA_{OL}(\omega_{co}) = 1$), se obtiene:

$$MG = \frac{1}{0.089K_c}$$

Problema 8.11

El comportamiento dinámico de una compleja organización empresarial se puede considerar que es como un sistema de control por retroalimentación. Un modelo sencillo de un sistema de control de gestión se presenta en la figura adjunta:



con las siguientes funciones de transferencia:

- $G_c = \frac{k_1}{s}$, correspondiente a la actividad de gestión de la empresa,
- $G_p = \frac{k_2}{\tau_p s + 1}$, correspondiente a las actividades de ingeniería y producción, y,
- $H = k_4 + k_5 s$ que representa la actividad de evaluación de los resultados $C(s)$ de la empresa.

El resultado de la evaluación, $B(s)$, se compara con los objetivos propuestos, $R(s)$, y la diferencia constituye la entrada al bloque de gestión, G_c , que dará lugar a la acción correctora. $D(s)$ representa las perturbaciones que actúan sobre la empresa.

- Calcular la constante de tiempo y el coeficiente de amortiguamiento de este sistema de control.
- Calcular el error permanente si se produce en la carga una perturbación unidad en forma de escalón.
- La respuesta en tiempo real a la perturbación anterior, ¿es oscilatoria? Si lo es, ¿qué período tiene?
- Para disminuir el error permanente frente a las variaciones en la consigna, ¿qué parámetro se debería modificar?
- Estudiar la estabilidad de este sistema de control. ¿Cómo afectaría a la estabilidad la modificación anterior?

Datos:

- $k_1 k_2 = 0.1$
- $\tau_p = 10$ meses
- $k_4 = 5$
- $k_5 = 7.6$

Solución

- a) La función de transferencia que describe la dinámica de este lazo de control, para un cambio en las perturbaciones (cambio en la carga), es:

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_c G_p H} = \frac{\frac{k_2}{k_1 k_2 k_4} s}{\frac{\tau_p}{k_1 k_2 k_4} s^2 + \frac{1 + k_1 k_2 k_5}{k_1 k_2 k_4} s + 1}$$

Por tanto, la constante de tiempo y el coeficiente de amortiguamiento son:

$$\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{k_1 k_2 k_4}} = 4.4721$$

$$2\tau\zeta = \frac{1 + k_1 k_2 k_5}{k_1 k_2 k_4} \Rightarrow \zeta = 0.3935$$

- b) El error permanente para un cambio en la carga de tipo escalón unidad ($D(s) = 1/s$) es:

$$\text{Error permanente} = \lim_{t \rightarrow \infty} [R(t) - C(t)] = 0 - \lim_{s \rightarrow 0} C(s) = - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{C(s)}{D(s)} \frac{1}{s} = 0$$

El error permanente vale 0, lo que significa que la perturbación se anula completamente.

- c) La respuesta será oscilatoria, ya que el coeficiente de amortiguamiento es menor que la unidad.

El período de la respuesta será:

$$T = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = 30.565$$

- d) La función de transferencia para cambios en la consigna es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p H} = \frac{\frac{k_1 k_2}{k_1 k_2 k_4}}{\frac{\tau_p}{k_1 k_2 k_4} s^2 + \frac{1 + k_1 k_2 k_5}{k_1 k_2 k_4} s + 1} = \frac{\frac{1}{k_4}}{\tau^2 s^2 + 2\pi\zeta s + 1}$$

Tal como era de esperar, la constante de tiempo y el coeficiente de amortiguamiento son los mismos que los calculados en el apartado a).

El error permanente para un cambio en la consigna escalón unidad ($R(s) = 1/s$) es:

$$\text{Error permanente} = \lim_{t \rightarrow \infty} [R(t) - C(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{s} - s \frac{C(s)}{R(s)} \frac{1}{s} \right] = 1 - \frac{1}{k_4}$$

El error permanente se reducirá cuando:

$$\lim_{k_4 \rightarrow 1} \text{Error permanente} = 0$$

Por tanto, el parámetro a modificar es k_4 . Se debe lograr que su valor sea lo más próximo a la unidad posible.

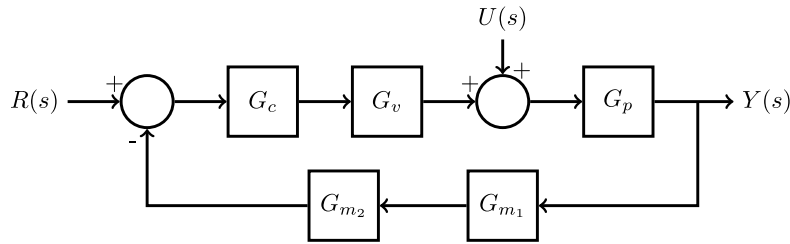
- e) Para determinar si el sistema es estable al variar k_4 se puede utilizar el método de Routh. La matriz de Routh es:

$$\begin{array}{cc} \frac{\tau_p}{k_1 k_2 k_4} & 1 \\ \frac{1 + k_1 k_2 k_5}{k_1 k_2 k_4} & \\ 1 & \end{array}$$

Se comprueba que el sistema es estable para cualquier valor de $k_4 > 0$.

Problema 8.12

Un sistema de control utiliza un PI y se representa en el diagrama de bloques de la figura:



Las funciones de transferencia son las siguientes:

$$\begin{aligned} G_v &= k_v \\ G_p &= \frac{1}{(s^2 + s + 2)(5s + 2)} \\ G_{m_1} &= e^{-0.8s} \\ G_{m_2} &= k_1 \end{aligned}$$

siendo G_c la correspondiente a un controlador PI.

Las constantes de las funciones de transferencia son: $K_c = 10$, $\tau_I = 1$ min, $k_1 = 0.25$ y $k_v = 0.5$.

- a. Determinar los márgenes de ganancia y de fase.

- b. Mostrar si el sistema es o no estable.
- c. ¿Qué influencia tendría la introducción en el controlador de una acción derivativa con $\tau_D = 1$ min.

💡 Solución

a) Para resolver este problema se recurrirá a los diagramas de Bode. La función de transferencia de lazo abierto de este sistema es:

$$G_{OL} = G_c G_v G_p G_{m_1} G_{m_2} = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right) k_v \frac{1}{(s^2 + s + 2)(5s + 2)} e^{-0.8s} k_1$$

Sustituyendo los valores de las constantes:

$$G_{OL} = 4 \left(1 + \frac{1}{s}\right) \frac{1}{s^2 + s + 2} \frac{1}{5s + 2} e^{-0.8s} = 4 \left(1 + \frac{1}{s}\right) \frac{0.5}{0.5s^2 + 0.5s + 1} \frac{0.5}{2.5s + 1} e^{-0.8s}$$

La función de transferencia del proceso G_p se puede descomponer de manera trivial en el producto de la función de transferencia de un proceso de primer orden y otro de segundo orden. Observar que dichas funciones de transferencia se ha multiplicado y dividido por el término independiente del denominador para obtener las funciones de transferencia de la manera acostumbrada. Si no se hace este paso, fácilmente se pueden obtener constantes de tiempo o coeficientes de amortiguamiento erróneos.

A partir de la función de transferencia de lazo abierto se obtiene la razón de amplitudes y el desfase necesario para obtener el diagrama de Bode:

$$RA_{OL} = 4 \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2}} \frac{0.5}{\sqrt{(1 - 0.5^2 \omega^2)^2 + (0.5\omega)^2}} \frac{0.5}{\sqrt{2.5^2 \omega^2 + 1}} 1$$

$$\varphi = \text{atan}\left(-\frac{1}{\omega}\right) + \text{atan}\left(-\frac{0.5\omega}{1 - 0.5^2 \omega^2}\right) + \text{atan}(-2.5\omega) - 0.8\omega$$

Aunque podríamos dibujar el diagrama de Bode con las funciones anteriores, es una tarea un poco tediosa. A continuación se muestra el diagrama de Bode dibujado utilizando *SymPy*. Para su representación utilizaremos la función `bode` del paquete `ClaseControl`:

```
import ClaseControl
```

La ayuda de esta función se puede obtener escribiendo:

```
?ClaseControl.bode
```

```
bode(Gol; wmin=1e-1, wmax=1e1, points=100, co=false, ra1=false, RAlabel="RA")
```

Representación del diagrama de Bode de la función de transferencia *Gol*.

Parámetros:

- **Gol**: Función de transferencia dependiente de s
- **wmin**: Frecuencia angular mínima a representar
- **wmax**: Frecuencia angular máxima a representar
- **points**: Número de puntos a representar
- **co**: Calcula y representa la frecuencia de cruce
- **ra1**: Calcula y representa la frecuencia que hace que $RA = 1$
- **RAlabel**: Etiqueta del gráfico de RA en el diagrama de Bode

Ejemplo:

```
salida = bode(s->20*(s+1)/s/(s+5)/(s^2+2s+10); wmax=10, co=true, ra1=true)
```

Para los resultados:

- `salida.fig`: Diagrama de Bode
- `salida.wco` y `salida.RAco`: Frecuencia de cruce y razón de amplitudes para la frecuencia de cruce
- `salida.w1` y `salida.phi1`: Frecuencia para $RA = 1$ y desfase para $RA=1$

Las funciones de transferencia del lazo de control nos permiten calcular la función de transferencia de lazo abierto (G_{OL}):

```
Gc(s) = 10*(1+1/s)
Gv(s) = 0.5
Gp(s) = 1/((s^2+s+2)*(5s+2))
Gm1(s) = exp(-0.8s)
Gm2(s) = 0.25

Gol(s) = Gc(s)*Gv(s)*Gp(s)*Gm1(s)*Gm2(s)

Gol (generic function with 1 method)
```

A continuación calculamos el diagrama de Bode para valores de frecuencia angular entre 0.1 y 1. Además, calculamos la frecuencia de cruce y la frecuencia que hace que la razón de amplitudes valga la unidad (ω_1):

```
salida = ClaseControl.bode(Gol; wmax=1, co=true, ra1=true);
```

El siguiente paso consiste en mostrar el diagrama de Bode:

```
salida.fig
```

```
PlutoPlotly.PlutoPlot(data: [
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields hoverinfo, hovertext, maker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
  "scatter with fields hoverinfo, hovertext, marker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields hoverinfo, hovertext, marker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
  "scatter with fields hoverinfo, hovertext, marker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
])
```

```
layout: "layout with fields margin, showlegend, template, xaxis1, xaxis2, yaxis1, and yaxis2
```

```
, Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}(), Dict{String, Vector{HypertextLiteral.
```

```
round(salida.wco, sigdigits=3)
```

```
0.781
```

lo que supone una valor de razón crítica de:

```
RAcr = salida.RAco
round(RAcr, sigdigits=3)
```

```
0.29
```

Como consecuencia el margen de ganancia, $MG = \frac{1}{RA_{cr}}$, será:

```
MG = 1/RAcr
round(MG, sigdigits=3)
```

3.44

Para obtener el margen de fase, necesitamos el valor del desfase para el que la razón de amplitudes toma el valor de la unidad, φ_1 . Es decir:

```
MF = 180 + salida.phi1*180/pi
```

50.15353175315704

- b) El sistema es **estable**, ya que la razón de amplitudes crítica es superior a la unidad.
- c) Al añadir al controlador una acción derivativa ($\tau_D = 1$ min) cambia la función de transferencia de lazo abierto del bucle de control:

$$G_{OL} = 4 \left(1 + \frac{1}{s} + 1s \right) \frac{0.5}{0.5s^2 + 0.5s + 1} \frac{0.5}{2.5s + 1} e^{-0.8s}$$

```
Gc(s) = 10*(1+1/s + 1*s)
```

```
Gv(s) = 0.5
```

```
Gp(s) = 1/((s^2+s+2)*(5s+2))
```

```
Gm1(s) = exp(-0.8s)
```

```
Gm2(s) = 0.25
```

```
Gol(s) = Gc(s)*Gv(s)*Gp(s)*Gm1(s)*Gm2(s)
```

Gol (generic function with 1 method)

El nuevo diagrama de Bode es:

```
salida_c = ClaseControl.bode(Gol; wmax=10, co=true);
salida_c.fig
```

```
PlutoPlotly.PlutoPlot(data: [
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields hoverinfo, hovertext, maker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields hoverinfo, hovertext, marker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis"
])
```

```
layout: "layout with fields margin, showlegend, template, xaxis1, xaxis2, yaxis1, and yaxis2",
, Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}(), Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}
```

```
round(salida_c.wco, sigdigits=3)
```

1.29

```
RAcr = salida_c.RAco  
round(RAcr, sigdigits=3)
```

0.156

Lo que significa que el margen de ganancia es:

```
MG = 1/RAcr  
round(MG, sigdigits=3)
```

6.4

Todo esto supone que el lazo de control con el controlador PID está más alejado de la zona de inestabilidad, lo que supone que se tratará de un sistema más robusto. Será mucho más difícil que el sistema entre en la zona inestable debido a un error en la estimación de alguna de las ganancias o del retraso, por ejemplo.

Problema 8.13

Dibujar el diagrama de Nyquist de la función de transferencia de lazo abierto siguiente:

$$GH = \frac{1}{s+1}$$

Problema 8.14

Determinar utilizando el criterio de Nyquist la estabilidad de lazo cerrado que tiene la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$GH = \frac{\frac{k_c}{8}}{(s+1)^3}$$

Problema 8.15

Dibujar los diagramas de Bode y de Nyquist para la siguiente función de transferencia. Discutir la estabilidad.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(2s+1)}$$

Problema 8.16

Considerar la función de lazo abierto siguiente:

$$G = \frac{K_c}{0.5s+1} e^{-t_d s}$$

Estudiar mediante los diagramas de Bode la influencia del retraso o del tiempo muerto t_d y de la ganancia K_c en la estabilidad del correspondiente lazo cerrado. Como ejemplo, considerar los casos en los que el retraso vale 0.01, 0.1 y 1 min.

💡 Solución

En primer lugar cargamos las bibliotecas necesarias y definimos las variables que utilizaremos para resolver el problema, K_c y t_d :

```
import ClaseControl

@syms td::positive=>"t_d" Kc::positive=>"K_c"

(t_d, K_c)
```

El siguiente paso es definir la función de lazo abierto, G_{OL}/K_c :

```
Gol_Kc(s, td) = 1/(0.5*s+1)*exp(-td*s)

Gol_Kc (generic function with 1 method)
```

Para comprobar el efecto del retraso sobre la ganancia del controlador, calcularemos la ganancia última, K_u , para los tres valores de retraso propuestos en el enunciado del problema.

- $t_d = 0.01$

Dibujamos el diagrama de Bode y encontramos $M = \frac{RA}{K_c(\omega_{co})}$, lo que significa que la ganancia última es:

$$K_u = \frac{1}{M}$$

```
sol1 = ClaseControl.bode(s->Gol_Kc(s, 0.01); wmax=300, co=true, RAlabel="RA/Kc")
sol1.fig
```

```
PlutoPlotly.PlutoPlot(data: [
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields hoverinfo, hovertext, maker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields hoverinfo, hovertext, marker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis"
])
```

```
layout: "layout with fields margin, showlegend, template, xaxis1, xaxis2, yaxis1, and yaxis2"
```

```
, Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}(), Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}
```

```
# Ganancia última
round(1/sol1.RAco, sigdigits=3)
```

79.2

- $t_d = 0.1$

```
sol2 = ClaseControl.bode(s->Gol_Kc(s, 0.1); wmin=1, wmax=100, co=true)
sol2.fig
```

```

PlutoPlotly.PlutoPlot(data: [
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields hoverinfo, hovertext, maker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields hoverinfo, hovertext, marker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis"
]

```

```

layout: "layout with fields margin, showlegend, template, xaxis1, xaxis2, yaxis1, and yaxis2",
, Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}{()}, Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}{()}

```

```

round(1/sol2.RAco, sigdigits=3)

```

8.5

- $t_d = 1$

```

sol3 = ClaseControl.bode(s->Gol_Kc(s, 1); wmin=1, wmax=10, co=true, RAlabel="RA/Kc")
sol3.fig

```

```

PlutoPlotly.PlutoPlot(data: [
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields hoverinfo, hovertext, maker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields hoverinfo, hovertext, marker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis"
]

```

```

layout: "layout with fields margin, showlegend, template, xaxis1, xaxis2, yaxis1, and yaxis2",
, Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}{()}, Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}{()}

```

```

round(1/sol3.RAco, sigdigits=3)

```

1.52

Se comprueba el efecto negativo del retraso sobre la estabilidad del lazo de control. Cuanto mayor es el retraso, menor debe ser la ganancia proporcional última:

td	Kc
0.01	79.2
0.1	8.50
1	1.52

Problema 8.17

Sea un proceso con la siguiente función de transferencia:

$$G_p = \frac{10}{s+1} e^{-t_d s}$$

Este proceso se controla mediante un controlador proporcional. Asumiendo que $G_m = G_f = 1$, determinar la relación entre K_c y t_d que hace al lazo cerrado estable en los siguientes casos:

- a. Aproximar el retraso con una aproximación de Padé de primer orden:

$$e^{-t_d s} \approx \frac{1 - \frac{t_d}{2}s}{1 + \frac{t_d}{2}s}$$

- b. Utilizar una aproximación de Padé para el retraso de segundo orden:

$$e^{-t_d s} \approx \frac{t_d^2 s^2 - 6t_d s + 12}{t_d^2 s^2 + 6t_d s - 12}$$

Problema 8.18

A continuación se muestran la razón de amplitud y desfase en función de la frecuencia de tres sistemas desconocidos:

- Sistema 1:

ω (ciclos/min)	RA	ϕ (°)
0.01	10	-0.63
0.05	9.99	-3.15
0.10	9.99	-6.30
1.0	9.95	-63.01
3.0	9.58	-188.60
5.0	8.94	-313.04
7.0	8.19	-436.06
9.0	7.43	-557.65
10.0	7.04	-617.96
12.0	6.40	-737.74
15.0	5.55	-915.75
20.0	4.47	-1209.35
30.0	3.16	etc.
40.0	2.43	
50.0	1.96	

- Sistema 2:

ω (ciclos/min)	RA	ϕ (°)
0.01	5.00	-0.23
0.05	5.05	-1.13
0.10	5.20	-2.39
0.20	5.93	-5.44
0.30	7.68	-11.62
0.40	12.69	-23.96
0.50	25.00	-90.00
0.60	9.98	-151.39

ω (ciclos/min)	RA	ϕ (°)
0.70	5.00	-163.74
0.80	3.25	-168.10
0.90	2.20	-170.87
1.10	1.29	-173.46
1.50	0.62	-175.71
2.00	0.33	-176.95
5.00	0.05	-178.84

- Sistema 3:

ω (ciclos/min)	RA	ϕ (°)
0.01	17	-1.49
0.02	16.99	-2.98
0.10	16.67	-14.75
0.30	14.42	-41.21
0.50	11.66	-61.90
0.70	9.33	-77.76
1.00	6.80	-95.73
1.50	4.30	-117.03
2.00	2.92	-132.42
2.50	2.07	-144.53
3.00	1.55	-154.04
4.00	0.94	-169.23
8.00	0.26	-208.22
10.00	0.17	-223.12
20.00	0.04	-287.45

- Determinar el orden de los sistemas y buscar la existencia de tiempos muertos.
- Calcular los valores de los parámetros de los sistemas, incluido el retraso, si existe.

💡 Solución

Sistema 1

El primer paso será realizar una representación gráfica de los datos:

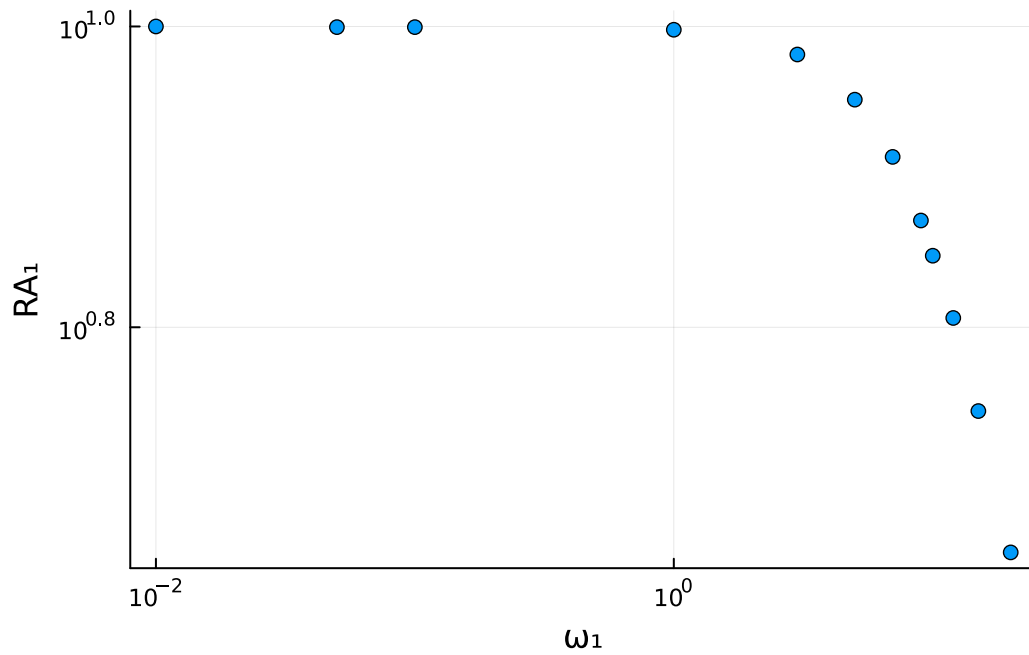
```
w_1 = [0.01, 0.05, 0.10, 1.0, 3.0, 5.0, 7.0, 9.0, 10.0, 12.0, 15.0, 20.0]
```

```
RA_1 = [10, 9.99, 9.99, 9.95, 9.58, 8.94, 8.19, 7.43, 7.04, 6.40, 5.55, 4.47]
```

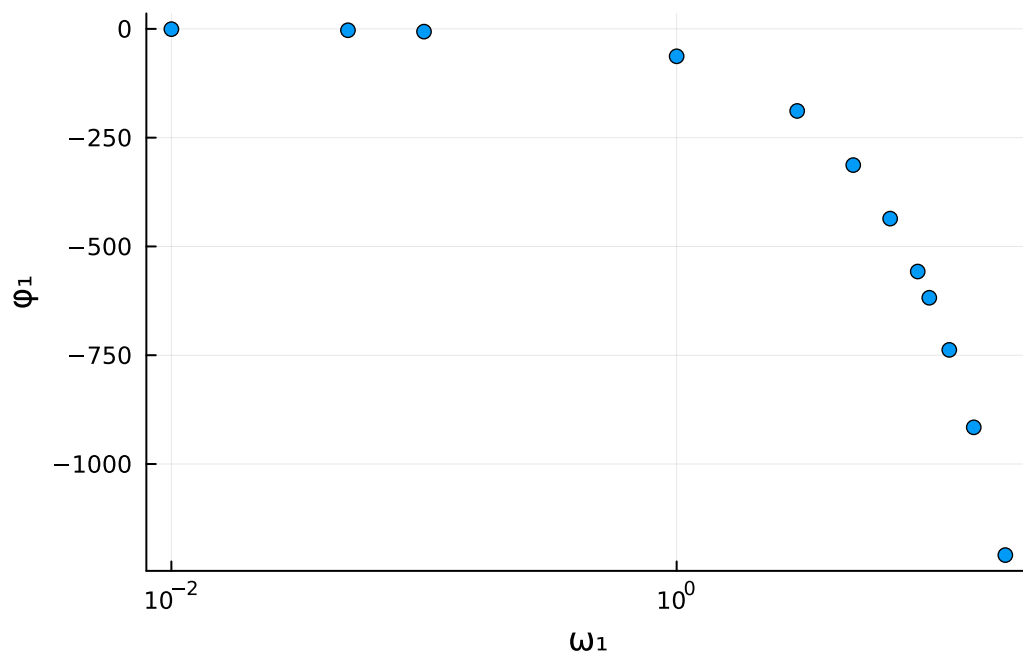
```
phi_1 = [-0.63, -3.15, -6.30, -63.01, -188.60, -313.04, -436.06, -557.65, -617.96, -737.74, -857.74, -977.74]
```

```
using Plots
```

```
scatter(w_1, RA_1, xscale=:log10, yscale=:log10,
        xlabel=" ", ylabel="RA ", legend=false)
```



```
scatter(w_1, phi_1, xscale=:log10,
        xlabel=" ", ylabel=" ", legend=false)
```



Observando la tabla de razón de amplitudes y desfase de la tabla para el Sistema 1 y su representación gráfica se obtienen las dos conclusiones siguientes:

1. Se trata de un sistema de primer orden o de segundo orden sobreamortiguado, ya que la razón de amplitudes decrece a medida que aumenta la frecuencia angular.
2. El desfase disminuye de manera no asintótica al aumentar la frecuencia angular.

Los parámetros del sistema se pueden obtener de diversas maneras:

Resolución gráfica

Se puede suponer que se trata de un sistema de primer orden con retraso, lo que implica:

$$\text{Razón de Amplitudes: } RA = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$$

$$\text{Desfase: } \varphi = \frac{180}{\pi} [\text{atan}(-\tau\omega) - t_d\omega]$$

Se puede determinar la ganancia del proceso utilizando la asíntota de baja frecuencia, es decir, sabiendo que:

$$ABF = \lim_{\omega \rightarrow 0} = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} = K$$

La ganancia del sistema coincidirá con el valor de la razón de amplitudes a baja frecuencia. Por tanto:

$$K = 10$$

Utilizando la asíntota de alta frecuencia se puede encontrar la constante de tiempo del sistema:

$$AAF = \log RA \approx \log K - \log \tau\omega = \log K - \log \tau - \log \omega$$

La asíntota de alta frecuencia es una recta de pendiente -1 y cuya ordenada en el origen es $\log K - \log \tau$. Gráficamente se puede encontrar la AAF al representar $\log RA$ frente a $\log \omega$. Se obtiene la siguiente recta:

$$\log RA = -\log \omega - 1.991$$

Por tanto, sabiendo que $K = 10$, se obtiene la siguiente constante de tiempo del sistema:

$$\tau = 0.10$$

Para encontrar el valor del retraso será necesario recurrir a los datos del desfase. Despejando de la ec. (2) se obtiene:

$$\varphi \frac{\pi}{180} + \text{atan}(-\omega\tau) = -t_d\omega$$

Tomando los 8 últimos puntos para los que se dispone de información sobre el desfase se obtiene el siguiente retraso (pendiente de la recta que ajusta los puntos según la ecuación anterior):

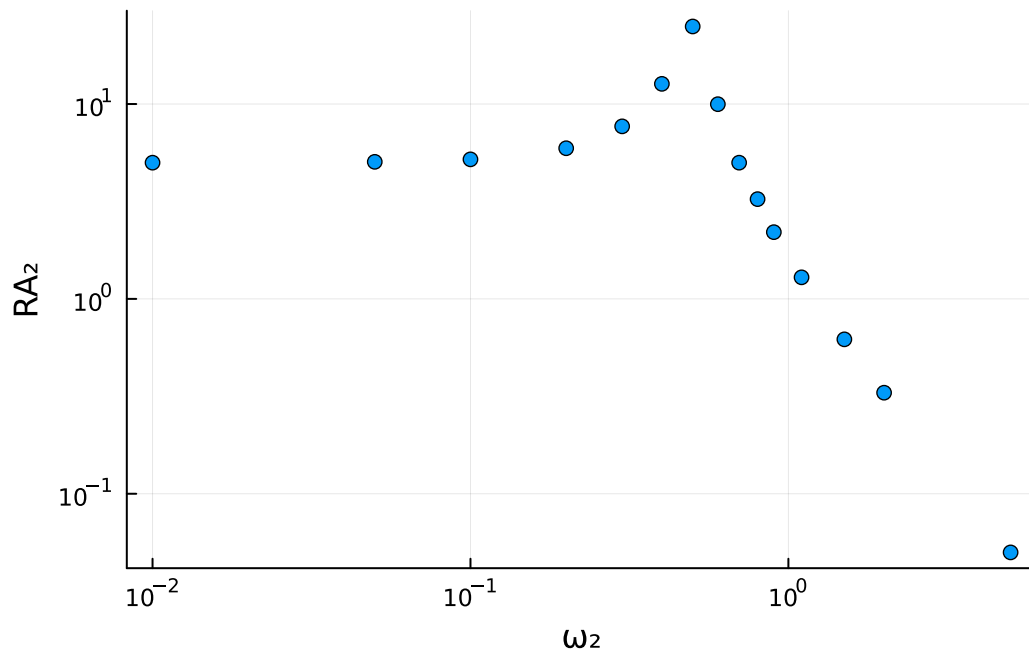
$$t_d = -1.0$$

Podemos comprobar la suposición de que el sistema es de primer orden con retraso representando la razón de amplitudes y el desfase del modelo junto con los datos experimentales. Para ello utilizaremos el paquete siguiente, que utilizaremos con el resto de sistemas del problema:

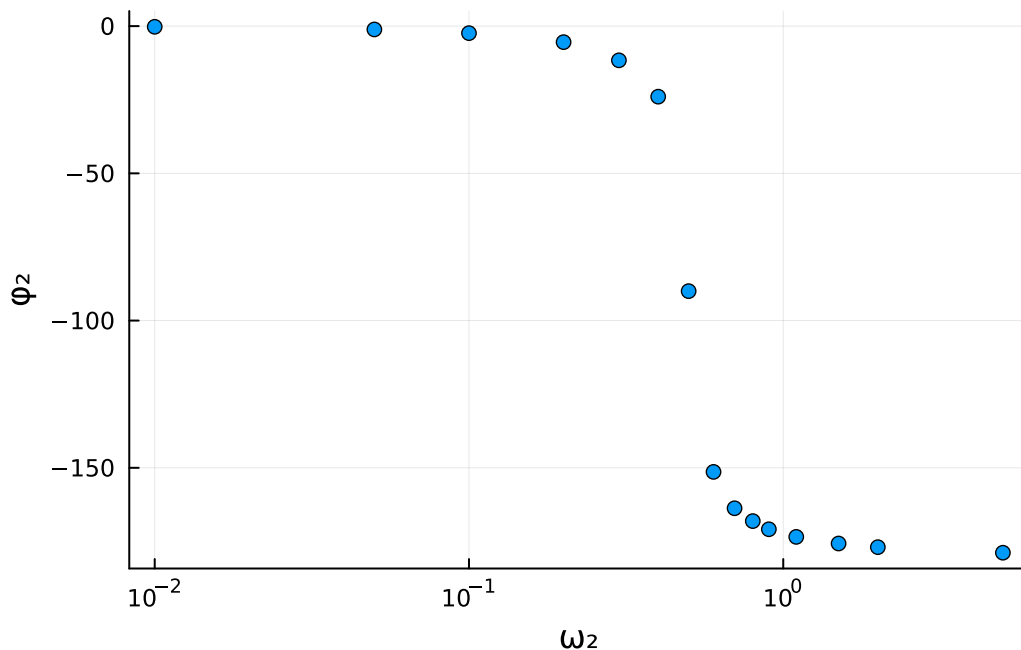
```
using ClaseControl
G1(s) = 10/(0.1s+1)*exp(-1.0s)

ClaseControl.bode(G1)

ClaseControl.Bode(PlutoPlotly.PlutoPlot(data: [
    "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
    "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
    "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
    "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
    "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
    "scatter with fields type, xaxis, and yaxis"
])
```

```
scatter(w_2, phi_2, xscale=:log10,
        xlabel=" ", ylabel=" ", legend=false, dpi=350)
```



El sistema 2 claramente es un sistema de segundo orden subamortiguado, solo hay que seguir las siguientes pistas:

1. El desfase tiende a -180° a medida que el valor de frecuencia angular aumenta.
2. El gráfico de razón de amplitudes del diagrama de Bode tiene un máximo que indica que se trata de un sistema subamortiguado.
3. El máximo de razón de amplitudes se produce para un retraso de -90° , lo que es propio de los sistemas de segundo orden.

Este problema nuevamente se puede resolver de cualquiera de las dos maneras para las que se ha resuelto el sistema 1. Si se realiza un ajuste no lineal para ajustar la razón de amplitudes respecto a la frecuencia angular, se obtiene:

```

# p[1]: Ganancia del sistema
# p[2]: Constante de tiempo
# p[3]: Coeficiente de amortiguamiento

@. RAmodel2(w, p) = p[1]/sqrt((1-p[2]^2*w^2)^2+(2*p[2]*p[3]*w)^2)

RAfit2 = curve_fit(RAmodel2, w_2, RA_2, [1.0, 1.0, 1.0]; autodiff=:forwarddiff)

LsqFit.LsqFitResult{Vector{Float64}, Vector{Float64}, Matrix{Float64}, Vector{Float64}, Vector{Float64}}
-----
, Float64[])

Los parámetros obtenidos del sistema son:

• Ganancia:

K_2 = RAfit2.param[1]
round(K_2, sigdigits=3)

5.0

• Constante de tiempo:

T_2 = abs(RAfit2.param[2])
round(T_2, sigdigits=3)

2.0

• Coeficiente de amortiguamiento:

Z_2 = abs(RAfit2.param[3])
round(Z_2, sigdigits=3)

0.1

Para comprobar la calidad del ajuste representaremos la función de transferencia del proceso con
los parámetros obtenidos más arriba junto con los datos experimentales:

G2(s) = K_2/(T_2^2*s^2+2*T_2*Z_2*s+1)

G2 (generic function with 1 method)

ClaseControl.bode(G2)

ClaseControl.Bode(PlutoPlotly.PlutoPlot(data: [
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis"
])

layout: "layout with fields margin, showlegend, template, xaxis1, xaxis2, yaxis1, and yaxis2", Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}(), Dict{String, Vector{HypertextLiteral.

```



```
ClaseControl.bode(G3)
```

```
ClaseControl.Bode(PlutoPlotly.PlutoPlot(data: [  
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",  
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",  
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",  
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",  
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",  
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis"  
])
```

```
layout: "layout with fields margin, showlegend, template, xaxis1, xaxis2, yaxis1, and yaxis2  
, Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}(), Dict{String, Vector{HypertextLiteral.
```

Problema 8.19

Sea un proceso cuya función de transferencias es:

$$G_p = \frac{10e^{-0.1s}}{0.5s + 1}$$

Los valores de los parámetros se han determinado con un error de $\pm 20\%$. Calcular la mayor ganancia de un controlador proporcional que hace al ciclo cerrado estable. Suponer $G_m = G_f = 1$.

9 Métodos empíricos y semiempíricos

9.1 Método del ensayo y error

Para realizar la sintonía experimentalmente se sigue un procedimiento similar al siguiente:

1. Se pone el controlador en manual y se eliminan las acciones integral y derivativa ($\tau_I \rightarrow \infty$ y $\tau_D = 0$)
2. Fijar la banda proporcional a un valor elevado, por ejemplo, 200 (ganancia proporcional pequeña)
3. Poner el controlador en automático
4. Realizar un pequeño cambio en la consigna o en la carga y seguir la respuesta de la variable controlada hasta que se alcance una respuesta estacionaria. Al ser la ganancia tan baja, la respuesta debe ser lenta
5. Reducir la banda proporcional a la mitad (doblar la ganancia) y realizar un nuevo cambio en la consigna o en la carga
6. Repetir el paso 5. hasta que la respuesta sea muy subamortiguada y oscilatoria. Esta es la *ganancia última*
7. Fijar la banda proporcional al doble de su último valor (la mitad de la ganancia proporcional)
8. Iniciar una acción integral reduciendo el valor de τ_I a su mitad. Realizar pequeñas perturbaciones o cambios en la consigna y observar el efecto
9. Encontrar el valor de τ_I que hace que la dinámica del sistema sea muy subamortiguada y fijar τ_I al doble de ese valor
10. Aumentar el valor de τ_D y realizar cambios en la consigna o en la carga. Encontrar el valor de τ_D que proporciona la mayor acción de control sin amplificar el ruido en el proceso de medida de la señal
11. Reducir el valor de la banda proporcional en pasos de un 10% hasta que se cumplan las especificaciones deseadas

Es importante decir que este método funciona para casi todos los lazos de control pero no funciona con aquellos sistemas que son inestables para ganancias elevadas y para ganancias bajas, es decir, aquellos que solo sean estables para valores de ganancia proporcional intermedios.

9.2 Métodos de criterio único

En este caso se trata de seleccionar uno de los múltiples parámetros que describen el comportamiento de un lazo de control retroalimentado y utilizarlo para el diseño del controlador. Se elegirán los parámetros del controlador en función del rendimiento deseado para ese parámetro.

Es posible tomar como parámetro el error permanente, de manera que el resultado será que se desean eliminar errores que permanezcan durante periodos largos de tiempo. Este es un criterio de estado estacionario.

También se puede seleccionar un criterio dinámico, como puede ser la frecuencia de oscilación de la parte transitoria de la respuesta. También se pueden tomar parámetros como puede ser el sobrepaso, el tiempo necesario para alcanzar el $\pm 5\%$ de un cierto valor, el tiempo de levantamiento, etc. Es frecuente que la selección de un cierto criterio haga imposible que se cumpla otro. Por ejemplo, si se trata de reducir el sobrepaso reduciendo la ganancia proporcional, se aumenta el tiempo de levantamiento.

Uno de los criterios más frecuentes es seleccionar los parámetros del controlador para que la razón de disminución tome el valor de $\frac{1}{4}$ (Figura 9.1).

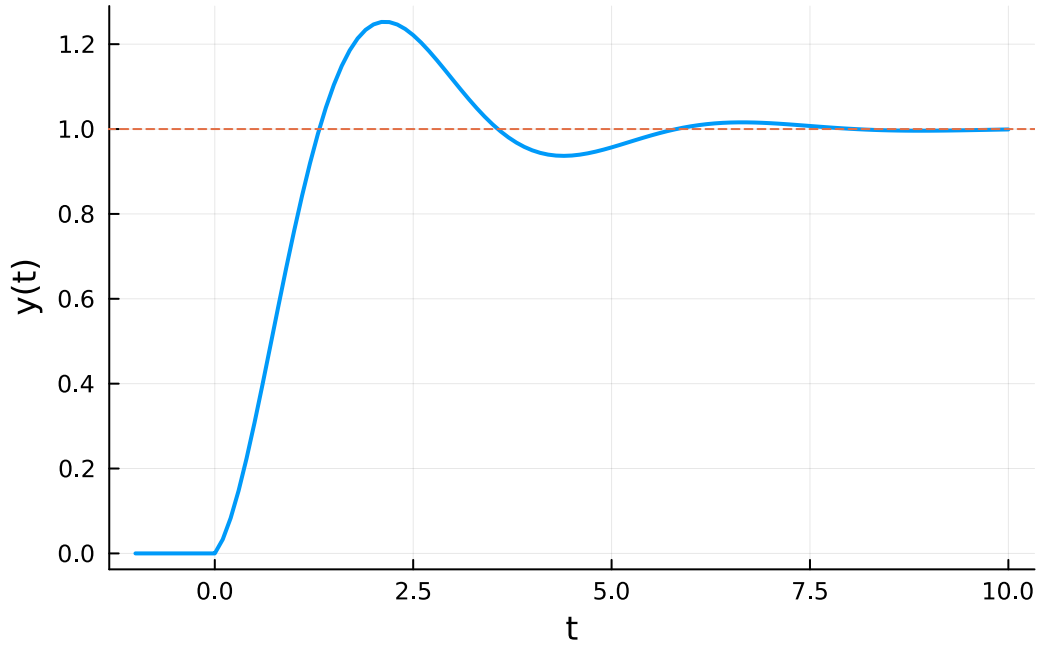


Figura 9.1: La respuesta de un lazo de control formado por un sistema de primer orden ($K_p = 1$, $\tau = 1$) y un controlador PI ($K_c = 0.233$ y $\tau_I = 0.1$) proporciona una respuesta con una razón de disminución de $1/4$ para un cambio de la consigna en forma de escalón unidad.

9.3 Método del criterio integral con el tiempo

En este método se toma la respuesta dinámica del sistema de control. En lugar de caracterizarla con un solo parámetro, como en el apartado anterior, se utilizará toda la curva desde $t = 0$ hasta $t \rightarrow \infty$. La sintonía del controlador se realizará minimizando una de las siguientes integrales con el tiempo:

1. Integral del error al cuadrado (*Integral of the square error*):

$$\text{ISE} = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt$$

Se minimiza esta integral cuando se desea eliminar errores grandes, ya que estos son los que más contribuyen al valor de la integral.

💡 Ejemplo

En el [problema 9.4](#) se minimiza la ISE utilizando Julia para sintonizar un lazo de control.

2. Integral del valor absoluto del error (*Integral of the absolute value of the error*):

$$\text{IAE} = \int_0^{\infty} |\varepsilon(t)| dt$$

En este caso se trata de eliminar errores pequeños. Estos errores podrían ser muy difíciles de eliminar minimizando la ISE, ya que al elevarlos al cuadrado se hace todavía más pequeños respecto a los errores grandes.

3. Integral del valor absoluto del error ponderado con el tiempo (*Integral of the time-weighted absolute error*):

$$\text{ITAE} = \int_0^{\infty} t|\varepsilon(t)| dt$$

Se utiliza cuando se desea eliminar errores muy persistentes en el tiempo, ya que la integral amplifica los errores que permanecen durante tiempos largos, incluso cuando se trata de errores pequeños.

9.4 Método de la curva de respuesta. Método de Cohen y Coon

Una vez seleccionado el controlador que se va a utilizar para el lazo de retroalimentación es necesario dar valores a los parámetros del mismo para completar el diseño, es lo que se conoce como realizar la sintonía del controlador. Para la selección se puede recurrir a métodos semiempíricos como es el método de Cohen y Coon o el método de Ziegler-Nichols, que se trata en el siguiente apartado.

El método de Cohen y Coon también es conocido como el método de la curva de reacción del proceso y se basa en el método de Ziegler-Nichols de lazo abierto. Para ponerlo en práctica hay que abrir el bucle de retroalimentación desconectando el elemento final de control (Figura 9.2).

Una vez abierto se produce un cambio en escalón de altura A en la variable $c(t)$, que actúa sobre el elemento final de control. Se registra el valor medido de la variable controlada $y_m(t)$ respecto al tiempo. De esta manera se obtiene la curva de respuesta del proceso (CRP). La función de transferencia que relaciona la variación de la entrada, $c(s)$, y la respuesta, $y_m(s)$, es:

$$G_{\text{CRP}} = \frac{y_m(s)}{c(s)} \approx G_f G_p G_m$$

Esta función de transferencia no solo depende de la dinámica del proceso, también incluye a aquellos elementos que pueda haber entre la entrada y la salida. Típicamente, incluirá al elemento final de control y al medidor, aunque puede haber otros elementos.

Cohen y Coon observaron que la mayoría de procesos presentaban un CRP de aspecto parecido a una sigmoide, que se podía aproximar a un proceso de primer orden con un retraso:

$$G_{\text{CRP}} = \frac{y_m(s)}{c(s)} \approx \frac{K}{\tau s + 1} e^{-t_d s}$$

donde K , τ y t_d se determinan a partir del análisis de la curva de respuesta del proceso (Figura 9.3):

$$K = \frac{B}{A} = \frac{\text{Salida en estado estacionario}}{\text{Entrada en estado estacionario}}$$

$$\tau = \left(1 - \frac{1}{e}\right) B$$

$$t_d = \text{Tiempo transcurrido hasta que el sistema responde}$$

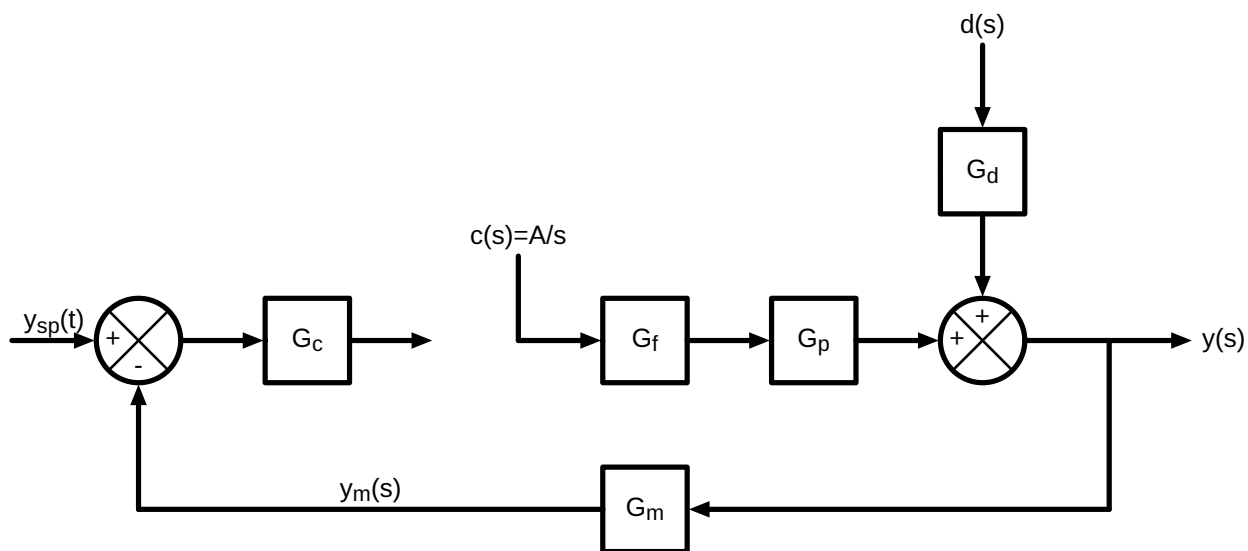


Figura 9.2: Lazo de retroalimentación abierto para introducir un escalón al elemento final de control.

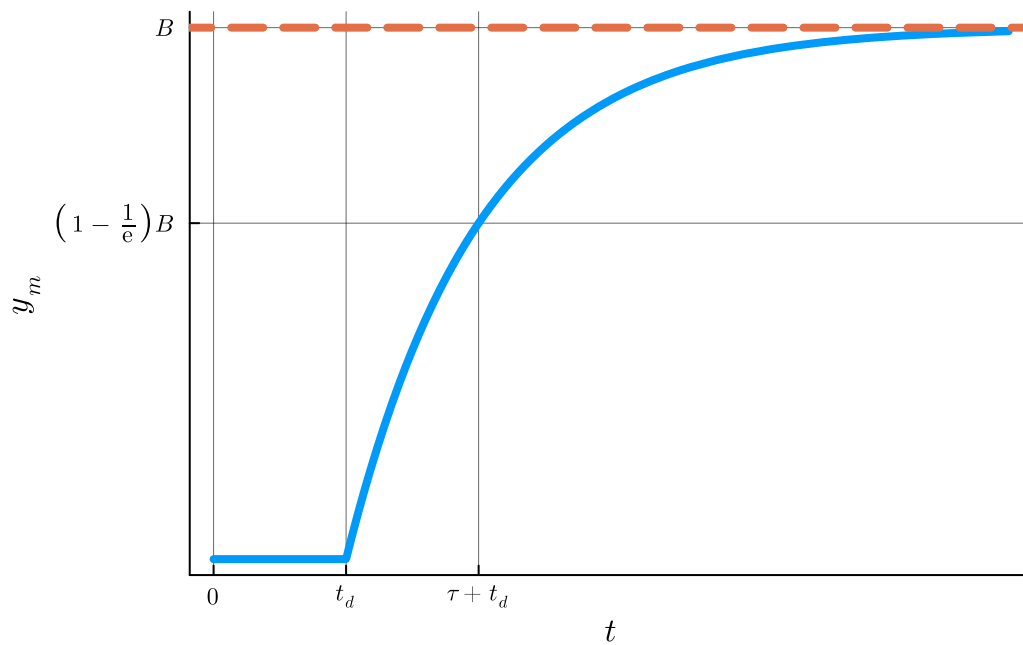


Figura 9.3: Análisis gráfico de la curva de respuesta del proceso.

Para realizar la sintonía del controlador se recurre a las siguientes ecuaciones:

1. Controladores P:

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau}{t_d} \left(1 + \frac{t_d}{3\tau} \right)$$

2. Controladores PI:

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau}{t_d} \left(0.9 + \frac{t_d}{12\tau} \right)$$

$$\tau_I = t_d \frac{30 + 3\frac{t_d}{\tau}}{9 + 20\frac{t_d}{\tau}}$$

3. Controladores PID:

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau}{t_d} \left(\frac{4}{3} + \frac{t_d}{4\tau} \right)$$

$$\tau_I = t_d \frac{32 + 6\frac{t_d}{\tau}}{13 + 8\frac{t_d}{\tau}}$$

$$\tau_D = t_d \frac{4}{11 + 2\frac{t_d}{\tau}}$$

En Hägglund y Åström (2002) y en Åström y Hägglund (2004) se proponen nuevos valores para la sintonía con el objetivo de que presenten una respuesta menos oscilatoria:

1. Controladores PI:

$$K_c = \frac{0.14}{K_p} + \frac{0.28\tau}{t_d} K_p$$

$$\tau_I = 0.33t_d + \frac{6.8\tau t_d}{10t_d + \tau}$$

2. Controladores PID

$$K_c = \frac{1}{K_p} \left(0.2 + 0.45 \frac{\tau}{t_d} \right)$$

$$\tau_I = \frac{0.4t_d + 0.8\tau}{t_d + 0.1\tau} t_d$$

$$\tau_D = \frac{0.5\tau t_d}{0.3t_d + \tau}$$

9.5 Método de Ziegler y Nichols

Al contrario que el método anterior, esta es una técnica de lazo cerrado. El procedimiento es el siguiente:

1. Llevar el sistema al nivel de operación deseado, que normalmente corresponderá con las condiciones de diseño

2. Utilizando solo el control proporcional y con el ciclo cerrado, introducir un cambio en la consigna y variar la ganancia proporcional hasta que el sistema varíe continuamente. La frecuencia de oscilación sostenida es la frecuencia de cruce ω_{co} . La razón de amplitudes de la respuesta en la frecuencia de cruce es RA_{co}
3. Se calculan las siguientes magnitudes:

$$\text{Ganancia última: } K_u = \frac{1}{RA_{co}}$$

$$\text{Periodo último de oscilaciones sostenidas: } P_u = \frac{2\pi}{\omega_{co}}$$

4. Ziegler y Nichols recomendaron los siguientes parámetros para controladores por retroalimentación:

- P:

$$K_c = \frac{K_u}{2}$$

- PI:

$$K_c = \frac{K_u}{2.2}$$

$$\tau_I = \frac{P_u}{1.2}$$

- PID:

$$K_c = \frac{K_u}{1.7}$$

$$\tau_I = \frac{P_u}{2}$$

$$\tau_D = \frac{P_u}{8}$$

En Hägglund y J.Åström (2004) se propone otra sintonía para el controlador PI con objeto de obtener una respuesta menos oscilatoria:

$$K_c = K_u 0.15$$

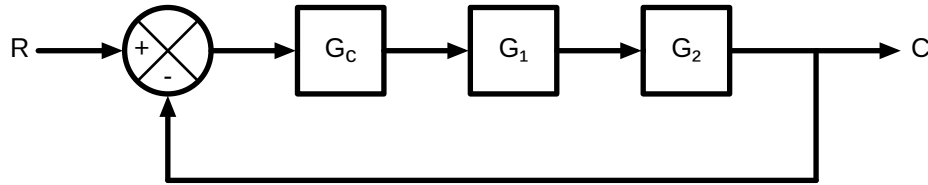
$$\tau_I = P_u 0.17$$

En O'Dwyer (2009) se puede encontrar una extensísima lista con ecuaciones similares, con reglas para realizar la sintonía de controladores PI y PID en las más diversas situaciones.

9.6 Problemas

Problema 9.1

Sea el sistema de control representado en la figura:



donde $G_1 = \frac{1}{s+1}$ y $G_2 = \exp(-1.02s)$.

- Si $G_c = K_c$, determinar el error permanente de la respuesta para una entrada en escalón unidad.
- Para eliminar el error permanente se recomienda que el controlador sea PID. ¿Qué valores de diseño recomendaría para los parámetros del controlador PID? Se sugiere usar el método de Ziegler-Nichols.

💡 Solución

- a) En primer lugar, encontraremos la función de transferencia del lazo de control, $G = \frac{C}{R}$, y, a continuación calcularemos el error permanente.

Empezamos cargando el paquete `ClaseControl.jl`:

```
using ClaseControl
```

Buscamos la función de transferencia G y calculamos el error permanente:

```
# Definición de la variable Kc
@syms s, t::real
@syms Kc::positive=>"K_c"

# Definición de las funciones de transferencia del lazo
G1 = 1/(s+1)
G2 = exp(-1.02s)
Gc = Kc

# Función de transferencia del lazo de control
G = Gc*G1*G2/(1+Gc*G1*G2)

# Cambio en la consigna en forma de escalón unidad
R = 1/s

# Respuesta del lazo de control
C = G*R

# Cálculo del offset
Offset = sympy.limit(s*(R-G*R), s, 0)
```

$$\frac{1}{K_c+1}$$

- b) Para el método de Ziegler-Nichols, en primer lugar, hay que encontrar la frecuencia de cruce. Es decir, aquella frecuencia que provoca un retraso de $-\pi$ rad. A partir de este valor, se puede encontrar la ganancia última K_u , que marca el límite de estabilidad, y el periodo último P_u en esas condiciones.

Podemos encontrar ω_{co} a partir del diagrama de Bode:

```
salida = ClaseControl.bode(lambdify(G1*G2)); co=true)
```

```
salida.fig
```

```
PlutoPlotly.PlutoPlot(data: [
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields hoverinfo, hovertext, maker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields hoverinfo, hovertext, marker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis"
])
```

```
layout: "layout with fields margin, showlegend, template, xaxis1, xaxis2, yaxis1, and yaxis2"
```

```
, Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}(), Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}()
```

```
1.995576456564642
```

Es importante destacar que en el primero de los gráficos realmente se está representando $\frac{RA}{K_c}$. Con el valor de la frecuencia de cruce, se puede calcular el periodo último de oscilación:

$$P_u = \frac{2\pi}{\omega_{co}}$$

```
Pu = 2*pi/salida.wco
```

```
3.1485565419006822
```

La ganancia última es el inverso de la razón de amplitudes para la frecuencia de cruce:

$$K_u = \frac{1}{RA_{co}}$$

```
Ku = 1/salida.RAco
```

```
2.2321123166173993
```

Sustituyendo los valores K_u y P_u en las fórmulas de Ziegler y Nichols se encuentra la sintonía del controlador PID:

```
Kc = Ku/1.7
```

```
1.3130072450690584
```

```
_I = Pu/2
```

```
1.5742782709503411
```

```
D = Pu/8
```

```
0.3935695677375853
```

Problema 9.2

Determinar los parámetros efectivos de un sistema a partir de la curva de reacción que se indica y calcular la frecuencia crítica y la ganancia máxima. Determinar los ajustes de los parámetros de un controlador PID según el método de Ziegler-Nichols y compararlos con los que se obtienen directamente de la curva de reacción.

Tiempo (min)	Resp. (ua)
0	0
1	0
2	0
3	4
4	10
5	19
6	27
7	35
8	41
9	45
30	50

Solución

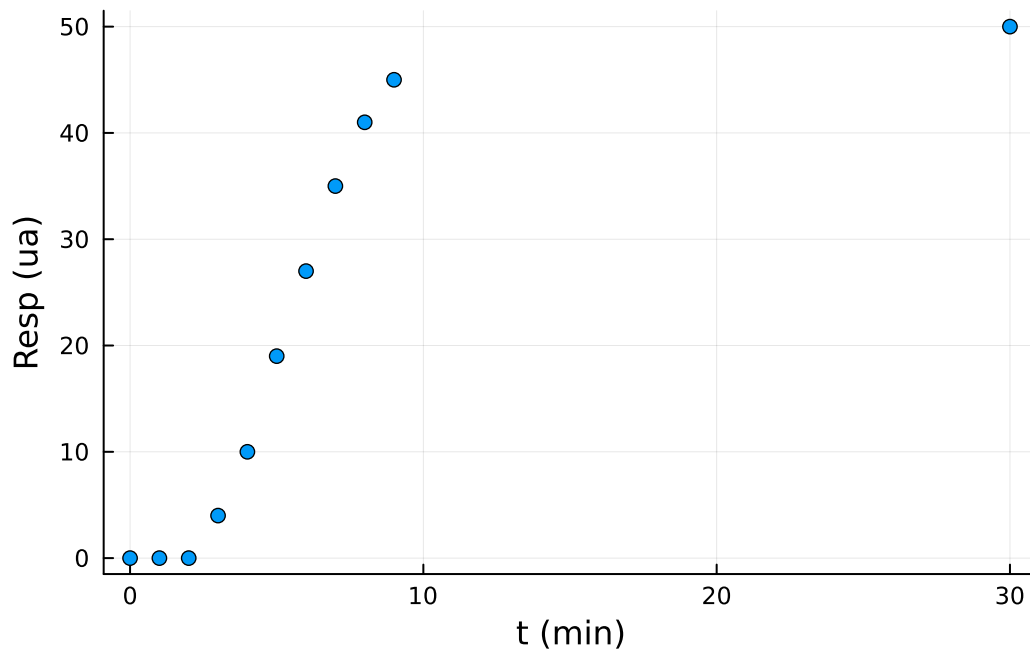
A partir de los datos de la curva de reacción se pueden obtener los parámetros de la función de transferencia de lazo abierto de varias maneras. En cualquier caso se supone que la curva de reacción del proceso sigue un modelo de primer orden con retraso.

Determinación de los parámetros de la curva de respuesta del proceso

Se representan los puntos disponibles y se encuentran en el gráfico los puntos B , τ y t_d , tal como se muestra en la figura a continuación:

```
t = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 30]
Resp = [0, 0, 0, 4, 10, 19, 27, 35, 41, 45, 50]

scatter(t, Resp, legend=False, xlabel="t (min)",
        ylabel="Resp (ua)", dpi=350)
```



A partir del gráfico se observa que B toma un valor de 50 ua. Suponiendo que se haya realizado una entrada en forma de escalón unidad ($A = 1$), se puede obtener directamente el valor de la ganancia del proceso ($K_p = \frac{B}{A}$):

$K_p = 50$

50

Para encontrar el retraso, determinamos cuando empieza a responder el proceso, tal como muestra la Figura 9.3. Para ellos, hemos considerado la recta que pasa entre los puntos (4 min, 10 ua) y (6 min, 27 ua):

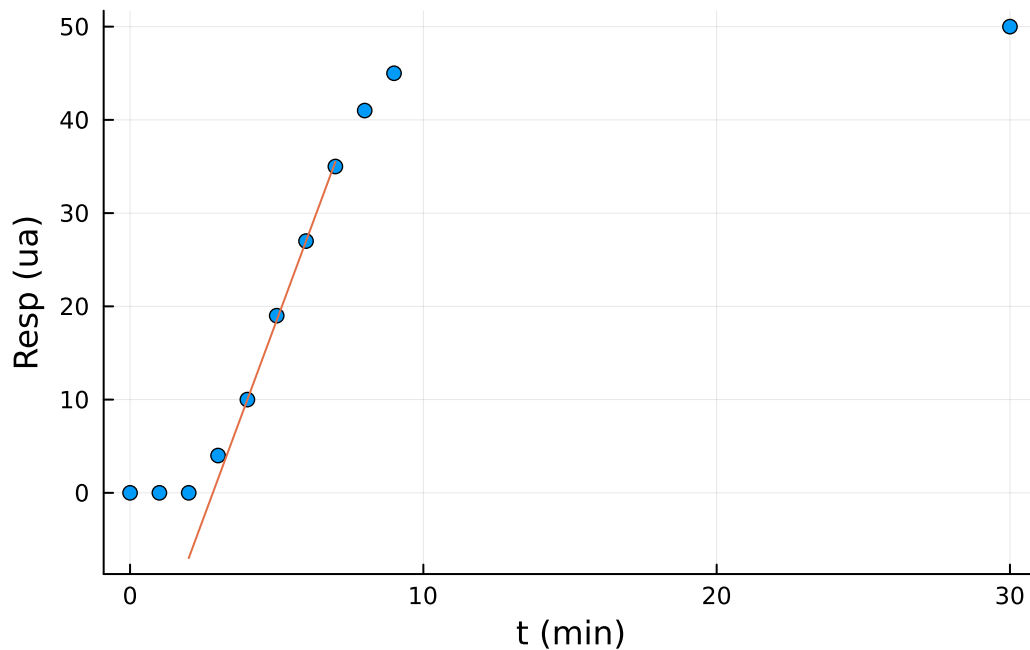
Cálculo de la pendiente (a) y de la ordenada en el origen (b)

$a = (27-10)/(6-4)$

$b = 27 - a*6$

Representación de la recta

`plot!(t->a*t+b, 2.0, 7.0)`



Como consecuencia el valor del retraso será el tiempo que hace que esa recta tenga un valor $Resp = 0$:

$$td = -b/a$$

2.823529411764706

Para determinar la constante de tiempo del proceso (τ_p), deberemos encontrar el tiempo para el que la $Resp$ es $B(1 - 1/e)$. El tiempo que encontraremos será $\tau_p + t_d$, por lo que será necesario restar el valor del retraso que hemos encontrado más arriba:

```
# Utilizaremos un algoritmo de interpolación lineal para encontrar el
# tiempo que hace que Rep = B*(1-exp(-1))
using Interpolations, Roots
```

```
itp = LinearInterpolation(t, Resp);
```

```
# Resolvemos la ecuación numéricamente
```

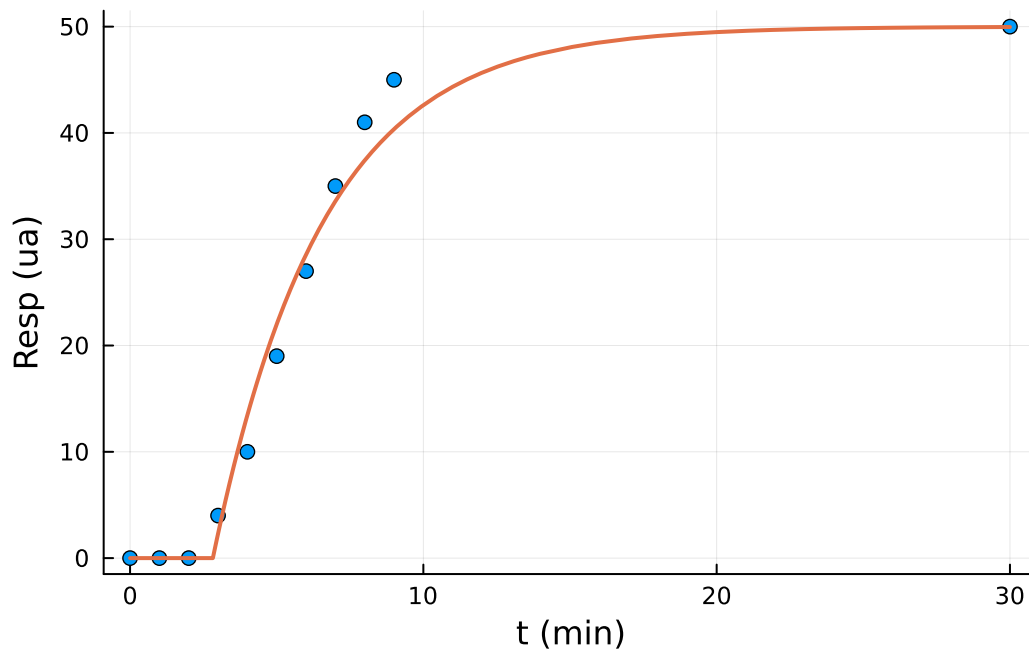
```
Tp = find_zero(t->itp(t)-50*(1-exp(-1)), 8)-td
```

3.7522240809137792

Comprobamos la bondad del ajuste representando la respuesta del proceso de primer orden con un retraso utilizando los valores obtenidos a partir de la curva de respuesta del proceso:

```
R_t(t) = Kp*(1-exp(-(t-td)/Tp))*(t>td)
```

```
scatter(t, Resp, legend=false, xlabel="t (min)", ylabel="Resp (ua)")
plot!(R_t, lw=2)
```



Se comprueba que se obtiene un ajuste razonable considerando la simplicidad del método utilizado. La razón más probable por la que el ajuste no es mejor es porque no se trate realmente de un proceso de primer orden. Probablemente, un proceso de segundo orden sobreamortiguado con un retraso proporcionaría mejor ajuste.

Sintonía con el método de Cohen y Coon

Para encontrar la sintonía por el método de lazo abierto o de la curva de respuesta del proceso, solo hay que sustituir en las fórmulas propias de un controlador PID:

$$K_{c_cc} = \frac{1}{K_p \cdot T_p} \cdot \frac{4}{3 + t_d/T_p}$$

0.040437671875296795

$$T_{i_cc} = \frac{t_d \cdot (32 + 6 \cdot t_d/T_p)}{(13 + 8 \cdot t_d/T_p)}$$

5.420678851042273

$$T_{d_cc} = \frac{t_d \cdot 4}{(11 + 2 \cdot t_d/T_p)}$$

0.9031688839998492

Sintonía por el método de Ziegler y Nichols

Para aplicar este método deberemos encontrar el periodo último de oscilación y la ganancia última considerando un controlador proporcional.

Obtendremos estos valores considerando la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$G_{OL} = K_c G_{CRP}$$

Al dibujar el diagrama de Bode, representaremos $\frac{RA}{K_c}$, lo que permitirá encontrar el parámetro M , a partir del que calcularemos la ganancia última K_u . El valor de P_u lo calcularemos a partir de la frecuencia de cruce:

```
salida = ClaseControl.bode(s->Kp/(Tp*s+1)*exp(-td*s); wmax=1, co=true)
salida.fig
```

```

PlutoPlotly.PlutoPlot(data: [
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields hoverinfo, hovertext, maker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields hoverinfo, hovertext, marker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis"
]

```

```

layout: "layout with fields margin, showlegend, template, xaxis1, xaxis2, yaxis1, and yaxis2",
, Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}(), Dict{String, Vector{HypertextLiteral.

```

$wco = salida.wco$

0.6873341673074302

$M = salida.RAco$

18.075878202106487

Lo que supone:

$K_u = 1/M$

0.055322346655525934

$P_u = 2 \cdot \pi / wco$

9.141383632641746

La sintonía del controlador será:

$K_{c_zn} = K_u / 1.7$

0.03254255685619173

$Ti_zn = P_u / 2$

4.570691816320873

$Td_zn = P_u / 8$

1.1426729540802183

Comparativa de las dos sintonías

Estas son las sintonías obtenidas:

	Cohen-Coon	Ziegler-Nichols
K_c	0.040	0.032
τ_I	4.4	4.6
τ_d	0.90	1.1

Como se puede observar la sintonía obtenida por el método de Cohen y Coon es más agresiva, tiene una mayor ganancia proporcional y una menor constante de tiempo integral. Por otro lado, la acción de control derivativa de la sintonía propuesta por el método de Ziegler y Nichols es más elevada.

Para comparar el rendimiento de ambas sintonías se puede realizar un cambio en la consigna en forma de escalón unidad:

```
Gcrp = Kp/(Tp*s+1)*exp(-td*s)
```

```
# Sintonía de Cohen-Coon
```

```
Gc_cc = Kc_cc*(1+1/(Ti_cc*s)+Td_cc*s)
```

```
G_cc = Gc_cc*Gcrp/(1+Gc_cc*Gcrp)
```

```
# Sintonía de Ziegler-Nichols
```

```
Gc_zn = Kc_zn*(1+1/(Ti_zn*s)+Td_zn*s)
```

```
G_zn = Gc_zn*Gcrp/(1+Gc_zn*Gcrp)
```

$$\frac{50 \cdot (0.0371854995761881s + 0.0325425568561917 + \frac{0.00711983178126118}{s}) e^{-2.82352941176471s}}{\left(1 + \frac{50 \cdot (0.0371854995761881s + 0.0325425568561917 + \frac{0.00711983178126118}{s}) e^{-2.82352941176471s}}{3.75222408091378s + 1}\right) (3.75222408091378s + 1)}$$

En este caso la transformada inversa de Laplace no parece tener solución analítica, por lo que la realizaremos numéricamente utilizando el [método de Talbot](#):

```
using InverseLaplace
```

```
# Constructores de las transformadas inversas de Laplace
```

```
y_cc = ILT(lambdify(G_cc*1/s))
```

```
y_zn = ILT(lambdify(G_zn*1/s))
```

```
# Valores de tiempo para los que haremos la simulación
```

```
tt = range(0, 25, step=0.1)
```

```
# Cálculo de las respuesta de los lazos de control
```

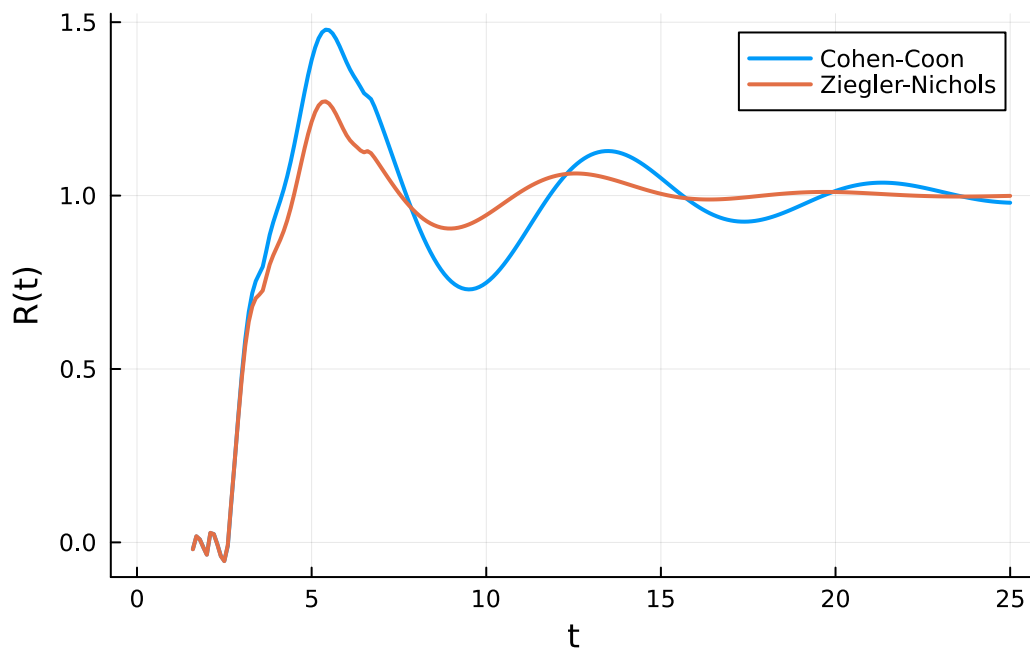
```
y_cc_t = map(y_cc, tt)
```

```
y_zn_t = map(y_zn, tt)
```

```
# Representación de las simulaciones realizadas
```

```
plot(tt, y_cc_t, label="Cohen-Coon", xlabel="t", ylabel="R(t)", lw=2, dpi=350)
```

```
plot!(tt, y_zn_t, label="Ziegler-Nichols", lw=2)
```



Se puede comprobar que la sintonía de Cohen-Coon tiene una respuesta ligeramente más rápida (tiempo necesario en alcanzar el valor estacionario por primera vez). Pero tiene como inconvenientes un mayor sobrepaso y una respuesta más subamortiguada.

Problema 9.3

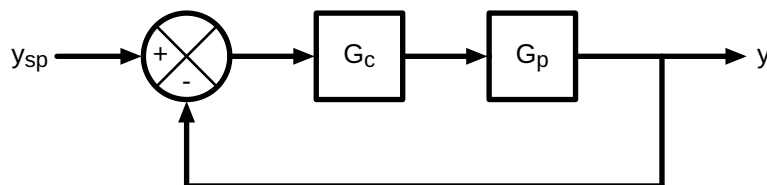
Determinar la ganancia de un controlador proporcional para que la razón de disminución de lazo cerrado sea $1/4$. La función de transferencia que describe el proceso es:

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 1}$$

Las funciones del medidor y del elemento final de control son iguales a la unidad.

💡 Solución

El lazo de control que propone el problema es:



Por tanto, la función de transferencia que representará la dinámica del bucle de control es:

$$G = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p}$$

Sustituyendo y operando se encuentra:

$$G = \frac{\frac{K_c}{K_c + 1}}{\frac{1}{K_c + 1}s^2 + \frac{3}{K_c + 1}s + 1}$$

Al tratarse de un sistema de segundo orden, la constante de tiempo es:

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{K_c + 1}}$$

Para un sistema de segundo orden la razón de disminución es:

$$RD = \exp\left(-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

La razón de disminución debe ser de $\frac{1}{4}$, lo que supone que el coeficiente de amortiguamiento es, tras resolver la ecuación:

$$\zeta = \frac{\sqrt{5727}}{\sqrt{11920\pi^2 + 5727}}$$

Conocido ζ calcular la ganancia del controlador resulta trivial:

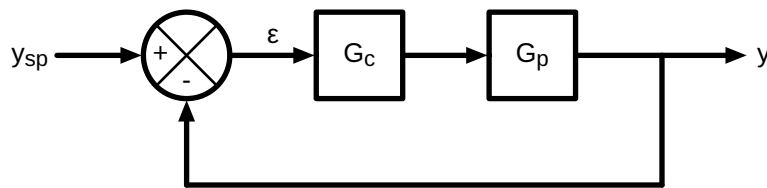
$$K_c = \frac{11920\pi^2}{5727}$$

Problema 9.4

Seleccionar la ganancia y tiempo integral de un controlador PI, empleando el criterio de hacer mínima la ISE. Considerar un cambio en escalón unidad para la consigna. El proceso a controlar es de primer orden con ganancia 10 y constante de tiempo 1.0. Asumir que las funciones de transferencia del medidor y del elemento final de control son iguales a la unidad. Los parámetros seleccionados deben cumplir las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 100 \geq K_c \geq 1 \\ 10 > \tau_I > 0.1 \end{cases}$$

Solución



Para minimizar la integral del error al cuadrado simularemos el proceso y evaluaremos numéricamente el valor de la integral. Utilizaremos un algoritmo de optimización para encontrar la sintonía óptima.

En primer lugar, cargaremos las bibliotecas necesarias. Son las siguientes:

- `SymPy.jl`: Para cálculo simbólico, la utilizaremos para realizar los cálculos previos con las funciones de transferencia.
- `Plots.jl`: Para la representación de gráficos.
- `InverseLaplace.jl`: Para evaluar numéricamente las transformadas inversas de Laplace, la utilizaremos para realizar las simulaciones del lazo de control.

- `Trapz.jl`: Para calcular numéricamente la integral utilizando el método de los trapecios.
- `Optim.jl`: Para realizar el proceso de optimización.

`using SymPy, InverseLaplace, Plots, Optim, Trapz`

Empezaremos definiendo las variables necesarias para poder realizar los cálculos con SymPy:

```
@syms Kc::positive=>"K_c" Ti::positive=>"tau_I" s t::real
```

```
(K_c, tau_I, s, t)
```

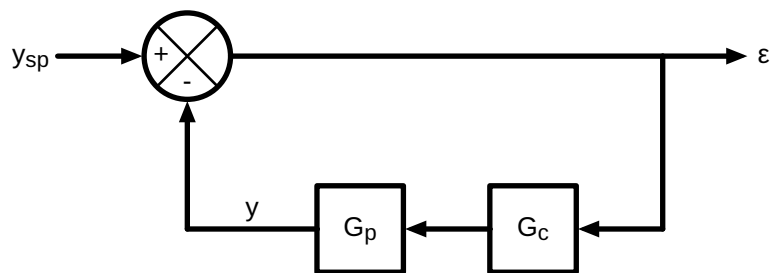
A continuación definimos las funciones de transferencia del proceso y del controlador PI:

```
Gc = Kc*(1+1/Ti/s)
```

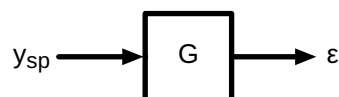
```
Gp = 10/(s+1)
```

$$\frac{10}{s+1}$$

En este caso nos interesa conocer como cambia el error $\varepsilon(t)$ en función de un cambio en la consigna y_{sp} . Podemos redibujar el lazo de control de la manera siguiente para poner en evidencia que la consigna será la entrada y el error la salida del bloque equivalente:



Se trata del mismo lazo de control, lo único que hemos hecho ha sido redibujarlo para indicar con mayor claridad la entrada y la salida que formarán el bloque equivalente:



La función de transferencia del bloque equivalente será:

```
G = 1/(1+Gc*Gp)
```

$$\frac{1}{\frac{10K_c(1+\frac{1}{s\tau_I})}{s+1}+1}$$

La transformada de Laplace del error para un cambio en la consigna en forma de escalón unidad es:

```
e_s = G*1/s
```

$$s \left(\frac{1}{\frac{10K_c(1+\frac{1}{s\tau_I})}{s+1}+1} \right)$$

El siguiente paso consiste en definir la función que calculará la ISE:

```

function ise(x)
    # Los parámetros del controlador se expresan como el vector x, que
    # tiene las siguientes componentes (Kc, Ti)

    # Tiempo de la simulación
    tsim = range(0, 0.5; length=100)

    # Cálculo de error(t) al cuadrado
    # 1. Definición de la transformada inversa de Laplace numérica
    error = ILT(lambdify(e_s(Kc=>x[1], Ti=>x[2])))
    # 2. Obtención del error y se eleva al cuadrado
    e2sim = map(error, tsim).^2

    # Convertimos los valores NaN en 0.0, para evitar problemas
    # con trapz()
    for i in range(1, length(e2sim), step=1)
        if isnan(e2sim[i])
            e2sim[i] = 0.0
        end
    end

    # Cálculo de la integral
    ise = trapz(tsim, e2sim)
end

```

ise (generic function with 1 method)

Finalmente, solo queda plantear la optimización, para la que se minimizará el valor de ISE considerando los límites de los parámetros del controlador que propone el enunciado del problema. Como valores iniciales se toma $K_{c_0} = 2$ y $\tau_{I_0} = 9$:

```
result = optimize(ise, [1.0, 0.1], [100.0, 10.0], [2.0, 9.0])
```

* Status: success

* Candidate solution

Final objective value: 2.040391e-07

* Found with

Algorithm: Fminbox with L-BFGS

* Convergence measures

x - x'	= 4.07e-07	0.0e+00
x - x' / x'	= 4.07e-09	0.0e+00
f(x) - f(x')	= 0.00e+00	0.0e+00
f(x) - f(x') / f(x')	= 0.00e+00	0.0e+00
g(x)	= 4.47e-10	1.0e-08

* Work counters

Seconds run:	52 (vs limit Inf)
Iterations:	5
f(x) calls:	162
f(x) calls:	162

Creamos dos nuevas variables con los valores de los parámetros del controlador que minimizan la ISE:

```
Kc_optim, Ti_optim = Optim.minimizer(result)
```

```
2-element Vector{Float64}:
```

```
99.99999999955283
```

```
0.9046308215714349
```

Finalmente, comprobamos la sintonía del controlador simulando la respuesta del lazo de control para un cambio de la consigna en forma de escalón unidad:

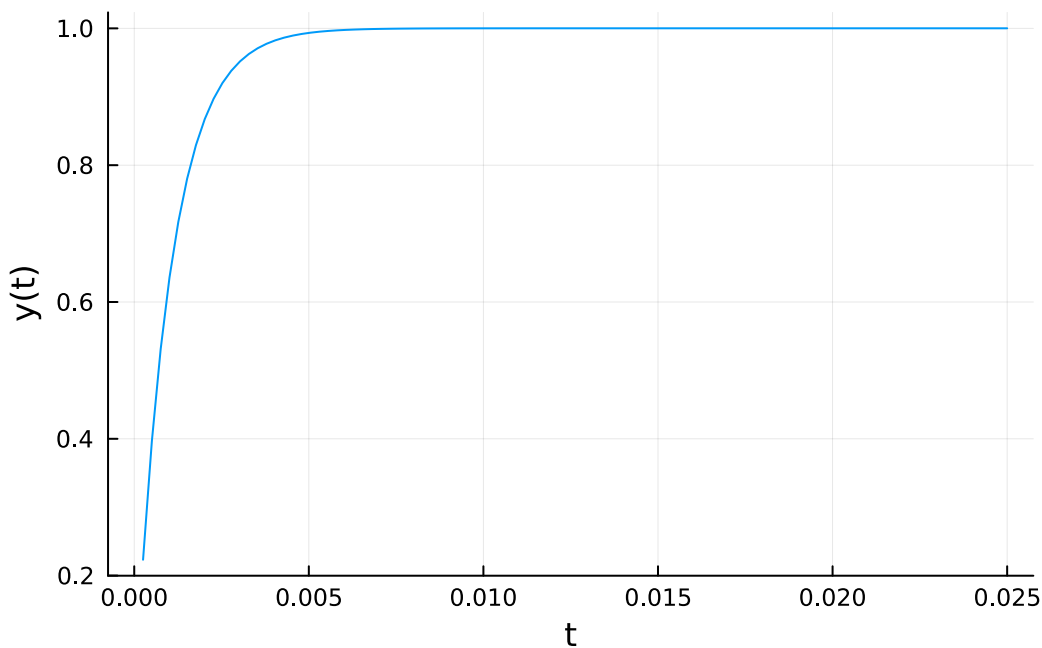
```
y_s = Gc*Gp/(1+Gc*Gp)*1/s
```

```
y_t = ILT(lambdify(y_s(Kc=>Kc_optim, Ti=>Ti_optim)))
```

```
tsim = range(0, .025; length=100)
```

```
ysim = map(y_t, tsim)
```

```
plot(tsim, ysim, legend=false, xlabel="t", ylabel="y(t)")
```



Problema 9.5

Seleccionar la ganancia de un controlador proporcional utilizando el criterio de la razón de disminución $1/4$. El proceso a controlar es:

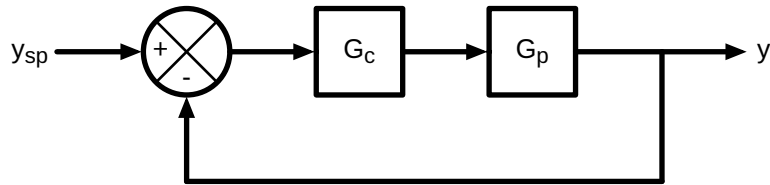
$$G_p(s) = \frac{10}{(s+2)(2s+1)}$$

Asumir que $G_m(s) = G_f(s) = 1$. Realizar también la sintonía utilizando el criterio del ISE mínimo con un cambio en la consigna en escalón unidad. En ambos casos se debe satisfacer la condición de que $100 \geq K_c \geq 0.1$. Comparar las sintonías y explicar las diferencias entre ellas.

💡 Solución

Razón de disminución 1/4

El bucle de control propuesto por el enunciado del problema es:



La función de transferencia que representa la dinámica de este lazo es:

$$G = \frac{K_c G_p}{1 + K_c G_p} = \frac{\frac{10K_c}{10K_c+2}}{\frac{2}{10K_c+2}s^2 + \frac{5}{10K_c+2}s + 1}$$

Se trata de un sistema de segundo orden, por tanto:

$$\tau^2 = \frac{2}{10K_c + 2}$$
$$2\tau\zeta = \frac{5}{10K_c + 2}$$

Como criterio de sintonía se toma que la razón de disminución de este lazo de control debe ser de 1/4:

$$RD = \exp\left(\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = \frac{1}{4}$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtiene:

$$\zeta = 0.2154$$

Conocido el coeficiente de amortiguamiento, ya solo queda resolver el sistema de ecuaciones anterior para obtener el valor de la ganancia proporcional:

$$K_c = 6.53$$

Minimizar ISE

Para obtener la sintonía óptima, aquella que minimiza la integral del error al cuadrado, del controlador se ha utilizado el programa siguiente:

```
using InverseLaplace, Optim, Trapz
```

```
# Definición de la función de transferencia del proceso
```

```
G_p(s) = 10/((s+2)*(2s+1))
```

```
# Definición de la función coste: ISE
```

```
function ISE(Kc)
```

```
# Función de transferencia del lazo de control
```

```
G(s) = Kc*G_p(s)/(1+Kc*G_p(s))
```

```
# Respuesta del lazo de control para un cambio en la consigna
```

```
# en forma de escalón unidad
```

```
y(s) = G(s)*1/s
```

```

# Tiempo de la simulación
tsim = range(0.0, 2.0; length=200)

# Transformada inversa de Laplace numérica para obtener y(t)
y_t = ILT(y, 80)

# Cálculo de los valores simulados de la variable controlada
ysim = map(y_t, tsim)

# Eliminación de los NaN
for i in 1:length(ysim)
    if isnan(ysim[i])
        ysim[i] = 0.0
    end
end

# Cálculo de la integral del error al cuadrado
ISE = trapz(tsim, (1.0 .-ysim).^2)
end

# Optimización univariante
result= optimize(ISE, 0.1, 100.0)

Results of Optimization Algorithm
* Status: success
* Algorithm: Brent's Method
* Search Interval: [0.100000, 100.000000]
* Minimizer: 9.415487e+01
* Minimum: 2.003754e-01
* Iterations: 32
* Convergence: max(|x - x_upper|, |x - x_lower|) <= 2*(1.5e-08*|x|+2.2e-16): true
* Objective Function Calls: 33

La ganancia proporcional obtenida es:

Kc_optim = Optim.minimizer(result)

94.15486825948487

El valor obtenido de la integral del error al cuadrado es:

Optim.minimum(result)

0.20037541519520863

Podemos compararlo con el valor obtenido con la ganancia proporcional obtenida para una razón
de disminución de 1/4:

ISE(6.53)

0.22714470820459098

```

Se observa una ligera reducción en el ISE.

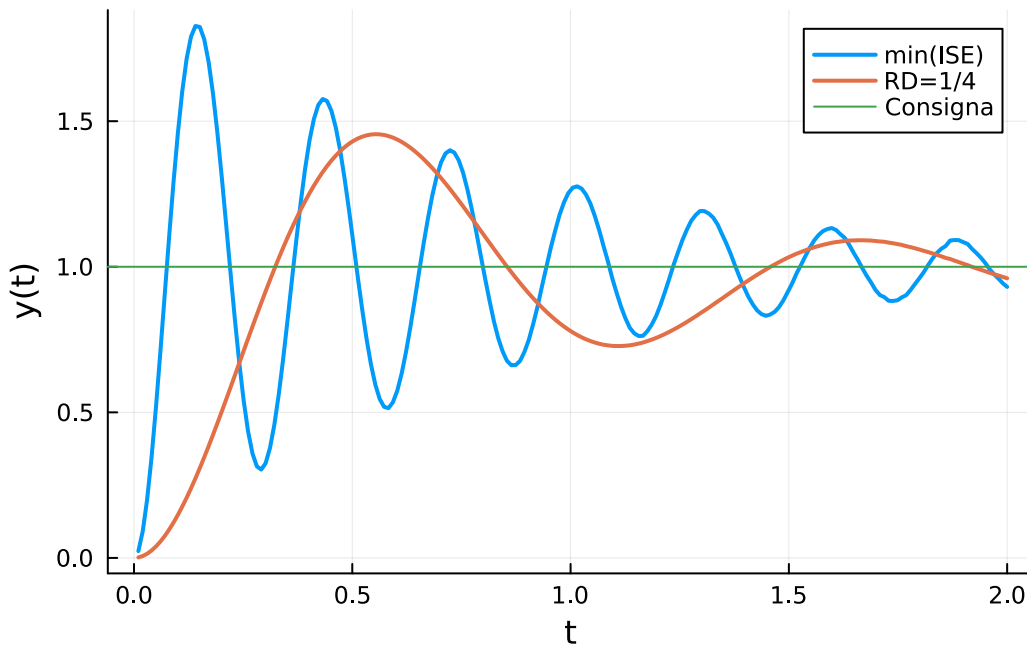
Finalmente podemos comparar las respuestas para las dos sintonías obtenidas:

using Plots

```
function ysimul(tsim, Kc)
    G(s) = Kc*G_p(s)/(1+Kc*G_p(s))
    y(s) = G(s)*1/s
    y_t = ILT(y, 80)
    ysim = map(y_t, tsim)
end

tsim = range(0.0, 2.0; length=200)
ysim_optim = ysimul(tsim, Kc_optim)
ysim_rd = ysimul(tsim, 6.53)

plot(tsim, ysim_optim, lw=2, label="min(ISE)", xlabel="t", ylabel="y(t)")
plot!(tsim, ysim_rd, lw=2, label="RD=1/4")
hline!([1.0], label="Consigna")
```



Problema 9.6

Repetir el problema anterior utilizando la técnica de Ziegler-Nichols en lugar de minimizar el ISE. Comparar los resultados obtenidos con los del problema anterior.

Problema 9.7

Considerar un lazo de control con las siguientes funciones de transferencia:

$$\begin{aligned} G_f &= 5 \\ G_p &= \frac{10}{s+4} \\ G_m &= \frac{1}{10s+1} \end{aligned}$$

- Realizar la sintonía de un controlador PI utilizando la técnica de Cohen-Coon.
- Dibujar la curva real de reacción del proceso junto con una aproximación de primer orden con retraso.

Problema 9.8

Repetir el problema anterior con un controlador PID y las siguientes funciones de transferencia:

$$G_f = 1$$

$$G_p = \frac{e^{-s}}{s + 10}$$

$$G_m = \frac{5e^{-0.1s}}{0.01s + 1}$$

Problema 9.9

Se obtiene experimentalmente la curva de reacción de un proceso y se obtienen los siguientes datos:

Tiempo (min)	Variable manipulable	Salida medida
-2	100	200
-1	100	200
0	150	200.1
0.2	150	201.1
0.4	150	204.0
0.6	150	227.0
0.8	150	251.0
1.0	150	280.0
1.2	150	302.5
1.4	150	318.0
1.6	150	329.5
1.8	150	336.0
2.0	150	339.0
2.2	150	340.5
2.4	150	341.0

Usando esos valores:

- Aproximar la respuesta de lazo abierto a un sistema de primer orden con retraso.
- Seleccionar los parámetros de un controlador PI utilizando la técnica de Cohen-Coon.

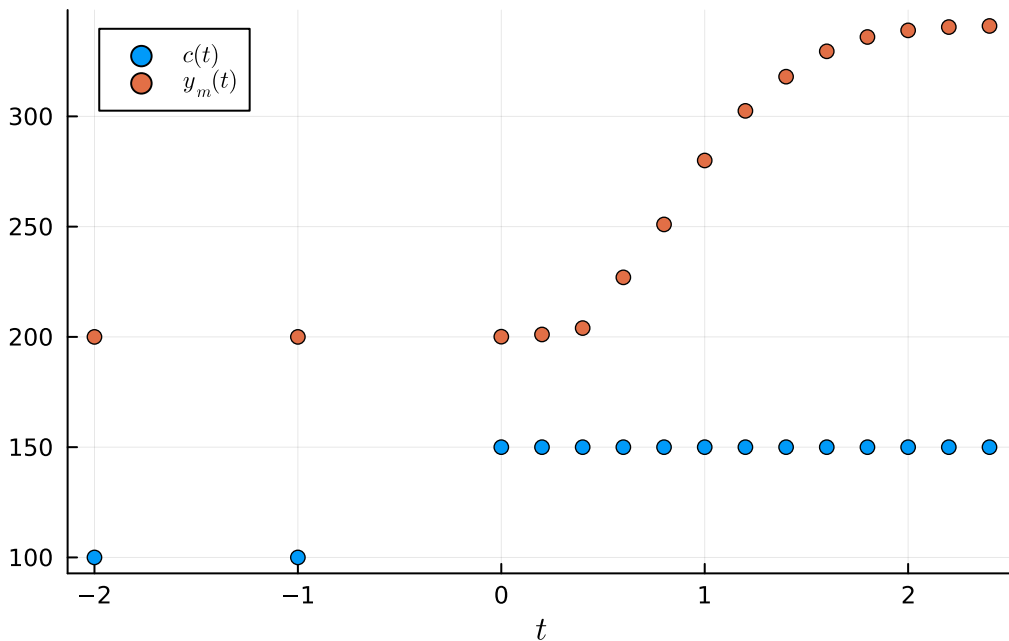
Solución

Una de las primeras tareas cuando se dispone de datos experimentales es representarlos gráficamente:

```
using Plots, LaTeXStrings
```

```
t = [-2.0, -1.0, 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 2.2, 2.4]
c = [100, 100, 150, 150, 150, 150, 150, 150, 150, 150, 150, 150, 150, 150, 150]
ym = [200, 200, 200.1, 201.1, 204.0, 227.0, 251.0, 280.0, 302.5, 318.0, 329.5, 336.0, 339.0,
```

```
scatter(t, c, label=L"c(t)", legend=:topleft, xlabel=L"t")
scatter!(t, ym, label=L"y_m(t)")
```



Observamos que el cambio de la variable manipulable ($c(t)$) tiene forma de escalón y que la respuesta del proceso ($y_m(t)$) tiene un aspecto que parece ser compatible con la de un sistema de primer orden.

Para poder aplicar el método de la curva de reacción del proceso para poder identificar los parámetros del proceso equivalente de primer orden (K , τ y t_d) deberemos, en primer lugar, definir las variables de desviación. A partir del análisis del gráfico o de la tabla de datos que los valores en estado estacionario son:

$$c_e = 100$$

$$y_{m,e} = 200$$

Por lo tanto las variables de desviación serán:

$$C(t) = c(t) - c_e = c(t) - 100$$

$$Y_m = y_m(t) - y_{m,e} = y_m(t) - 200$$

Además, solo consideraremos los puntos del 3 hasta el último, es decir, a partir del momento que se introduce el escalón:

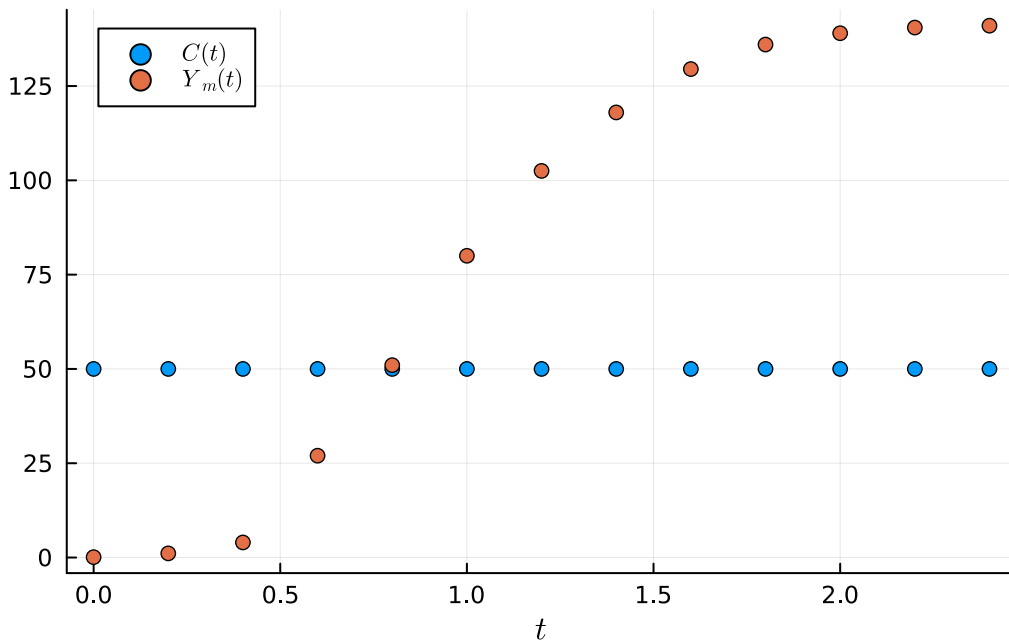
```
tdata = t[3:end]
C = c[3:end] .- c[1]
Ym = ym[3:end] .- ym[1]

13-element Vector{Float64}:
 0.099999999999999432
 1.09999999999999943
 4.0
 27.0
 51.0
 80.0
102.5
118.0
129.5
```

136.0
139.0
140.5
141.0

La representación gráfica de las variables de desviación queda como:

```
scatter(tdata, C, label=L"C(t)", legend=:topleft, xlabel=L"t")  
scatter!(tdata, Ym, label=L"Y_m(t)")
```



En el gráfico se observa que la altura del escalón es:

```
A = C[1]
```

50

y como la respuesta en estado estacionario de la curva de reacción del proceso es:

```
B = Ym[end]
```

141.0

se puede encontrar fácilmente la ganancia de la curva de reacción del proceso:

```
K = B/A
```

2.82

Estimamos la posición del retraso en:

```
td = 0.45
```

0.45

Encontramos la el valor del retraso mediante interpolación lineal para el punto en el que $Y_m = B(1 - 1/e)$:

```
using Interpolations, Roots
```

```
itp = LinearInterpolation(tdata, Ym)  
f(x)=itp(x)-B*(1-1/exp(1))
```

```
T = find_zero(f, 1)-td
```

```
0.6311466559540144
```

De manera que se obtienen los siguientes parámetros:

```
# Ganancia de Gcrp
```

```
K
```

```
2.82
```

```
# Constante de tiempo de Gcrp
```

```
round(T, digits=3)
```

```
0.631
```

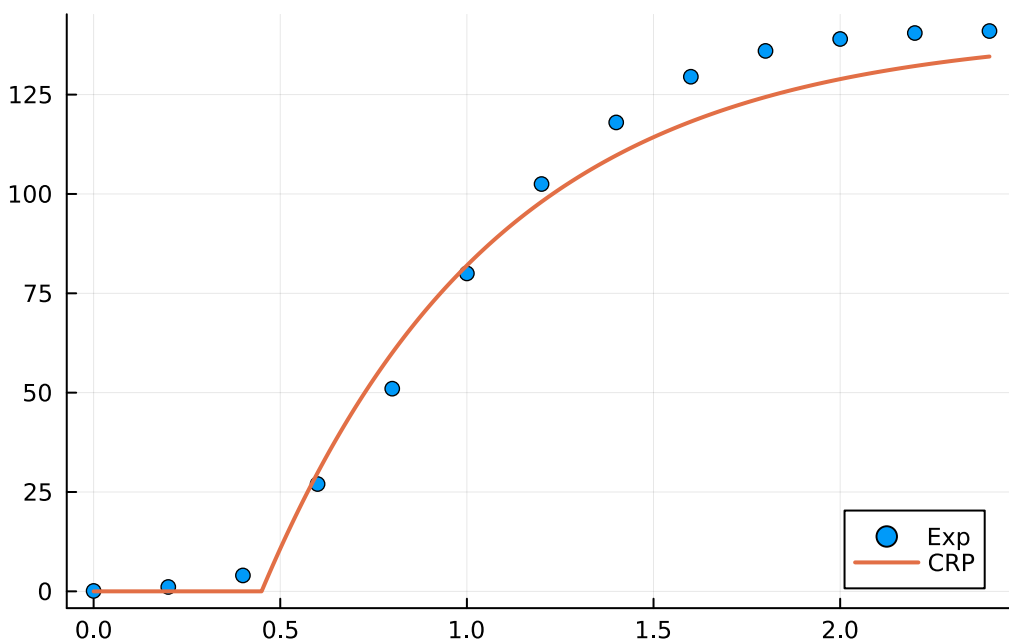
```
# Retraso de Gcrp
```

```
td
```

```
0.45
```

Se puede comprobar la bondad del ajuste representando la curva de respuesta del proceso junto con los datos experimentales:

```
scatter(tdata, Ym, legend=:bottomright, label="Exp")  
ysim_2(t, K, T, td) = K*A*(1-exp(-(t-td)/T))*(t-td>0)  
tsim = tdata[1]:0.01:tdata[end]  
plot!(tsim, ysim_2.(tsim, K, T, td), label="CRP", lw=2)
```



Se observa que el ajuste empeora a medida de que pasa el tiempo. Con toda probabilidad es debido a que el experimento ha finalizado demasiado pronto.

También podríamos haber obtenido los parámetros de G_{CRP} mediante regresión no lineal utilizando la biblioteca LsqFit:

```
# using Pkg; Pkg.add("LsqFit")
```

```
using LsqFit
```

Definimos el modelo para el ajuste, que se corresponde con la respuesta de un sistema de primer orden con retraso para una entrada en escalón de magnitud A :

```
# p[1] es la ganancia  
# p[2] es la constante de tiempo  
# p[3] es el retraso
```

```
@. model(t, p) = p[1]*A*(1-exp(-(t-p[3])/p[2]))
```

```
model (generic function with 1 method)
```

Realizamos el ajuste no lineal:

```
fit = curve_fit(model, tdata, Ym, [1.0,1.0,1.0]; autodiff=:forwarddiff)
```

```
LsqFit.LsqFitResult{Vector{Float64}, Vector{Float64}, Matrix{Float64}, Vector{Float64}, Vector{Float64},  
-----  
, Float64[]}
```

Para facilitar el análisis, vamos a crear variables con los resultados del ajuste. Usaremos el subíndice `lsq` para indicar que son los valores obtenidos por regresión no lineal:

```
K_lsq = fit.param[1]  
round(K_lsq, digits=3)
```

```
4.802
```

```
T_lsq = fit.param[2]  
round(T_lsq, digits=3)
```

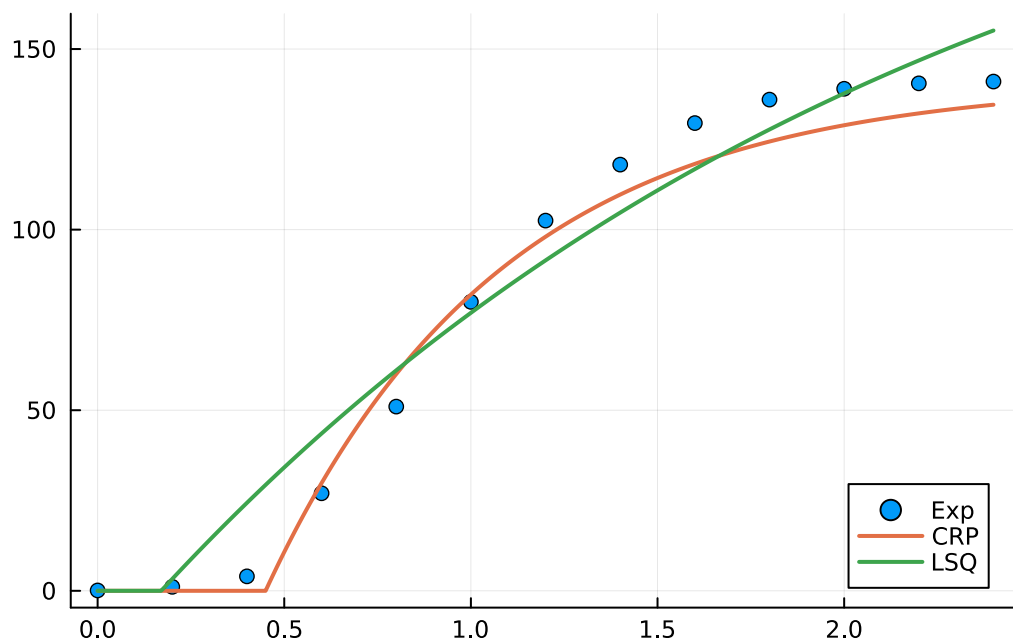
```
2.147
```

```
td_lsq = fit.param[3]  
round(td_lsq, digits=3)
```

```
0.17
```

Al representar los dos modelos, podemos comprobar que el ajuste mediante regresión no lineal se ve todavía más afectado por la falta de datos a tiempos largos.

```
scatter(tdata, Ym, legend=:bottomright, label="Exp")  
ysim_3(t, K, T, td) = K*A*(1-exp(-(t-td)/T))*(t-td>0)  
plot!(tsim, ysim_3.(tsim, K, T, td), label="CRP", lw=2)  
plot!(tsim, ysim_3.(tsim, K_lsq, T_lsq, td_lsq), label="LSQ", lw=2)
```



Quizás de manera sorprendente hemos encontrado que el ajuste utilizado por una técnica que podríamos considerar más rudimentaria nos proporciona un modelo experimental que tiene un comportamiento mejor que el proporcionado por un método más sofisticado y complejo, como es la regresión no lineal. La mayor sofisticación de la técnica no implica mejores resultados.

Calcular los parámetros del controlador PI resulta una tarea trivial:

$$K_c = 1/K \cdot T/t_d \cdot (0.9 + t_d/12/T)$$

`round(Kc, digits=3)`

0.477

$$T_i = t_d \cdot (30 + 3 \cdot t_d/T) / (9 + 20 \cdot t_d/T)$$

`round(Ti, digits=3)`

0.622

Problema 9.10

Utilizando los datos del problema anterior contestar a las siguientes preguntas:

- Sintonizar un controlador PI utilizando la técnica de Ziegler-Nichols.
- Comparar los resultados de la sintonía obtenidos con la técnica de Cohen-Coon y a los obtenidos al minimizar la ISE para un cambio en la consigna en escalón unidad.
- Comparar la tolerancia de las diferentes sintonías a errores en la ganancia, constante de tiempo o tiempo muerto. ¿Cuál de ellas posee una tolerancia mayor?

Problema 9.11

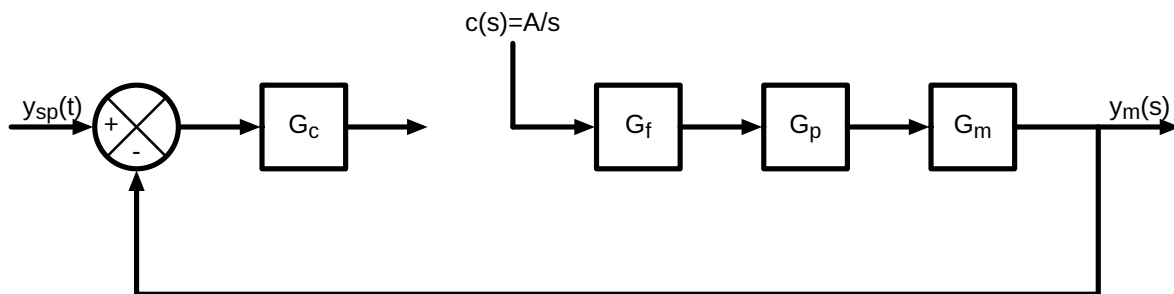
La curva de reacción de un proceso de un sistema de control de temperatura proporciona los siguientes valores: $K = 10$, $\tau = 2$ min y $t_d = 0.1$ min. Responder:

- Realizar la sintonía mediante la técnica de Ziegler-Nichols.

- b. Comparar la sintonía anterior con la obtenida con la técnica de Cohen-Coon.
- c. Asumir que los valores obtenidos con el método de la curva de reacción del proceso no son muy fiables. Calcular qué porcentajes de error de los valores K , τ y t_d puede tolerar la sintonía de Ziegler-Nichols sin volverse inestable.

💡 Solución

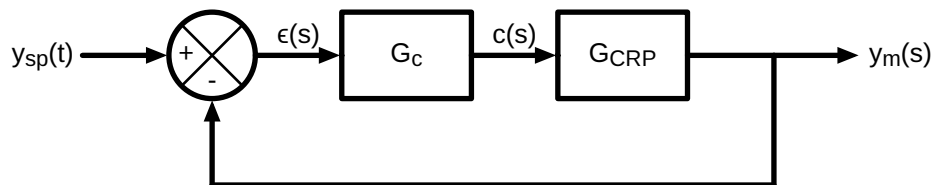
- a) Para obtener la curva de reacción de un proceso, hay que abrir el lazo de control (desconectando el controlador). A continuación hay que introducir un cambio en escalón en el elemento final de control. Para ello se puede utilizar un generador de funciones que simule al controlador, de manera que la variable c tenga una forma de escalón. Si se trata de una válvula puede ser algo tan sencillo como abrir o cerrar la válvula con rapidez. Evidentemente, el cambio generado debe ser conocido, por ejemplo, en el caso de la válvula se debe conocer el recorrido del émbolo. Como consecuencia en el registrador a la salida del proceso se obtiene la curva de respuesta del proceso, tal como muestra la figura siguiente:



A partir del análisis de la curva obtenida, siguiendo el método propuesto por Cohen y Coon, se obtiene la función de transferencia de la curva de respuesta del proceso, que engloba la dinámica del elemento final de control, proceso y medidor:



Los parámetros indicados en el enunciado del problema se han obtenido de esta manera. Por tanto, el lazo de control se puede representar según el siguiente bucle:



Para realizar la sintonía del controlador utilizando la técnica de Ziegler-Nichols hay que sustituir el controlador existente por un controlador proporcional. A continuación hay que buscar la frecuencia de cruce y la ganancia última del controlador. En este caso la función de transferencia de lazo abierto del bucle de control es:

$$G_{OL}(s) = K_c \frac{10}{2s + 1} e^{-0.1s}$$

El diagrama de Bode de este lazo de control es:

```

sol = ClaseControl.bode(s->10/(2s+1)*exp(-0.1s); wmin=0.1, wmax=100, co=true,
    RAlabel="RA/Kc");

sol.fig

PlutoPlotly.PlutoPlot(data: [
    "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
    "scatter with fields hoverinfo, hovertext, maker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
    "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
    "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
    "scatter with fields hoverinfo, hovertext, marker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
    "scatter with fields type, xaxis, and yaxis"
])

layout: "layout with fields margin, showlegend, template, xaxis1, xaxis2, yaxis1, and yaxis2",
, Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}(), Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}()

round(sol.wco, sigdigits=4)

16.02

round(sol.RAco, sigdigits=4)

0.312

```

La frecuencia de cruce tiene un valor aproximado de 16 rad/min y que $M = 0.31$, lo que implica que la ganancia última tiene un valor aproximado de 3.2.

Mediante las ecuaciones de la razón de amplitudes y el desfase de la función de transferencia de lazo abierto también se puede resolver el problema:

$$RA_{OL} = K_c \frac{10}{\sqrt{1 + 4\omega^2}}$$

$$\varphi_{OL} = \text{atan}(-2\omega) - 0.1\omega$$

En primer lugar hay que encontrar la frecuencia de cruce resolviendo la siguiente ecuación:

$$-\pi = \text{atan}(-2\omega_{co}) - 0.1\omega_{co}$$

Se obtiene una frecuencia de cruce:

$$\omega_{co} = 16.02 \text{ rad/min}$$

Utilizando la frecuencia de cruce se calcula el periodo último (de oscilaciones sostenidas):

$$P_u = \frac{2\pi}{\omega_{co}} = 0.392 \text{ min}$$

La ganancia última, aquella que marca el límite de estabilidad ($RA = 1$), se obtendrá resolviendo la ecuación:

$$1 = K_u \frac{10}{\sqrt{1 + 4\omega_{co}^2}}$$

La ganancia última es:

$$K_u = 3.206$$

Al no indicar el problema el tipo de controlador a sintonizar, se supondrá que se trata de un PID. Según los valores recomendados por Ziegler y Nichols la sintonía del controlador será:

$$K_c = \frac{K_u}{1.7} = 1.89$$

$$\tau_I = \frac{P_u}{2} = 0.196 \text{ min}$$

$$\tau_D = \frac{P_u}{8} = 0.049 \text{ min}$$

- b) El cálculo de la sintonía utilizando el método de Cohen y Coon es directo ya que la función de transferencia de la curva de reacción del proceso es conocida. La sintonía del controlador PID será:

$$K_c = \frac{1}{K} \frac{\tau}{t_d} \left(\frac{4}{3} + \frac{t_d}{4\tau} \right) = 2.69$$

$$\tau_I = t_d \frac{32 + 6 \frac{t_d}{\tau}}{13 + 8 \frac{t_d}{\tau}} = 0.241 \text{ min}$$

$$\tau_D = t_d \frac{4}{11 + 2 \frac{t_d}{\tau}} = 0.036 \text{ min}$$

Se puede observar que la sintonía propuesta por el método de Ziegler-Nichols tiene una ganancia proporcional menor. Como compensación la acción integral es más intensa, lo que supondrá una respuesta menos amortiguada (más oscilaciones).

- c) En el caso de que los parámetros de la curva de respuesta del proceso no sean muy fiables es necesario realizar un estudio de sensibilidad.

La función de transferencia de lazo abierto en este caso es:

$$G_{OL} = 1.89 \left(1 + \frac{1}{0.196s} + 0.049s \right) \frac{K}{\tau s + 1} e^{-t_d s}$$

Por tanto, la razón de amplitudes y el desfase serán:

$$RA_{OL} = 1.89 \sqrt{\left(0.049\omega - \frac{1}{0.196\omega} \right)^2 + 1} \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$$

$$\varphi_{OL} = \text{atan} \left(0.049\omega - \frac{1}{0.196\omega} \right) + \text{atan}(-\tau\omega) - t_d \omega$$

El lazo de control será estable si $RA_{OL} \leq 1$ para la frecuencia de cruce ($\varphi_{OL}(\omega_{co}) = -\pi$). Como simplificación se va a considerar la influencia de cada uno de los parámetros del proceso por separado.

Ganancia del proceso

En este caso:

$$RA_{OL} = 1.89 \sqrt{\left(0.049\omega - \frac{1}{0.196\omega} \right)^2 + 1} \frac{K}{\sqrt{1 + 4\omega^2}}$$

$$\varphi_{OL} = \text{atan} \left(0.049\omega - \frac{1}{0.196\omega} \right) + \text{atan}(-2\omega) - 0.1\omega$$

El diagrama de Bode de este sistema:

$$K_c = 1.89$$

$$T_i = 0.196$$

$$T_d = 0.049$$

```

sol_K = ClaseControl.bode(s->Kc*(1+1/(Ti*s)+Td*s)*1/(2s+1)*exp(-0.1s);
    wmin=10, wmax=100, co=true);

sol_K.fig

PlutoPlotly.PlutoPlot(data: [
    "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
    "scatter with fields hoverinfo, hovertext, maker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
    "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
    "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
    "scatter with fields hoverinfo, hovertext, marker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
    "scatter with fields type, xaxis, and yaxis"
])

layout: "layout with fields margin, showlegend, template, xaxis1, xaxis2, yaxis1, and yaxis2",
Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}(), Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}()

```

$$\sqrt{\left(0.049\omega_{co} - \frac{1}{0.196\omega_{co}}\right)^2 + 1} \frac{K}{\sqrt{1 + 4\omega_{co}^2}}$$

Se obtiene un valor de K de 18.1 ($K = \frac{1}{R_{co}}$), lo que supone que la ganancia del proceso puede aumentar un 81.5%.

Constante de tiempo del proceso

En este caso la razón de amplitudes y el desfase del lazo abierto serán:

$$RA_{OL} = 1.89 \sqrt{\left(0.049\omega - \frac{1}{0.196\omega}\right)^2 + 1} \frac{10}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$$

$$\varphi_{OL} = \text{atan}\left(0.049\omega - \frac{1}{0.196\omega}\right) + \text{atan}(-\tau\omega) - 0.1\omega$$

El límite de estabilidad vendrá determinado por las siguientes ecuaciones:

$$1 = 1.89 \sqrt{\left(0.049\omega_{co} - \frac{1}{0.196\omega_{co}}\right)^2 + 1} \frac{10}{\sqrt{1 + \tau_u^2\omega_{co}^2}}$$

$$-\pi = \text{atan}\left(0.049\omega_{co} - \frac{1}{0.196\omega_{co}}\right) + \text{atan}(-\tau_u\omega_{co}) - 0.1\omega_{co}$$

donde ω_{co} es la frecuencia de cruce y τ_u es la constante de tiempo límite de estabilidad, ya que se calcula para una razón de amplitudes igual a la unidad para la frecuencia de cruce.

Se pueden resolver estas ecuaciones numéricamente utilizando la biblioteca `NLsolve.jl`:

```

# import Pkg; Pkg.add("NLsolve")
using NLsolve

function f!(F, x)
    wco = x[1]
    Tu = x[2]
    F[1] = Kc*sqrt((Td*wco-1/Ti/wco)^2+1)*10/sqrt(1+Tu^2*wco^2)-1
    F[2] = atan(Td*wco-1/Ti/wco)+atan(-Tu*wco)-0.1*wco+pi
end

```

```
nlsolve(f!, [20.0, 1.0], autodiff=:forward)
```

Results of Nonlinear Solver Algorithm

```
* Algorithm: Trust-region with dogleg and autoscaling
* Starting Point: [20.0, 1.0]
* Zero: [23.6561256979143, 1.0975994533724522]
* Inf-norm of residuals: 0.000000
* Iterations: 4
* Convergence: true
  * |x - x'| < 0.0e+00: false
  * |f(x)| < 1.0e-08: true
* Function Calls (f): 5
* Jacobian Calls (df/dx): 5
```

Se obtiene un valor de la frecuencia de cruce de 23.66 rad y una ganancia del proceso última de 1.10.

Una alternativa consiste en buscar la constante de tiempo última del proceso por tanteo, ya sea utilizando los diagramas de Bode o directamente las ecuaciones. Por ejemplo, para una constante de tiempo de 1.1 min se obtiene el siguiente diagrama de Bode:

```
sol_T = ClaseControl.bode(s->Kc*(1+1/(Ti*s)+Td*s)*10/(1.1s+1)*exp(-0.1s);
      wmin=10, wmax=100, co=true);
```

```
sol_T.fig
```

```
PlutoPlotly.PlutoPlot(data: [
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields hoverinfo, hovertext, maker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis",
  "scatter with fields type, x, xaxis, y, and yaxis",
  "scatter with fields hoverinfo, hovertext, marker, mode, text, textposition, type, x, xaxis",
  "scatter with fields type, xaxis, and yaxis"
])
```

```
layout: "layout with fields margin, showlegend, template, xaxis1, xaxis2, yaxis1, and yaxis2
```

```
, Dict{String, Vector{HypertextLiteral.JavaScript}}(), Dict{String, Vector{HypertextLiteral.
```

$$\varphi_{OL} = \operatorname{atan}\left(\frac{1}{0.196\omega}\right) + \operatorname{atan}\left(\frac{10}{\sqrt{1+4\omega^2}}\right) + \operatorname{atan}(-2\omega) - t_d\omega$$

El valor límite del retraso t_{du} se puede calcular utilizando las siguientes ecuaciones:

$$1 = 1.89 \sqrt{\left(0.049\omega_{co} - \frac{1}{0.196\omega_{co}}\right)^2 + 1} \frac{10}{\sqrt{1 + 4\omega_{co}^2}}$$

$$-\pi = \text{atan}\left(0.049\omega_{co} - \frac{1}{0.196\omega_{co}}\right) + \text{atan}(-2\omega_{co}) - t_{du}\omega_{co}$$

Resolviendo la primera de las ecuaciones se encuentra la frecuencia de cruce:

$$\begin{cases} \omega_{co} = \pm \frac{500\sqrt{20\sqrt{727254571+248647}}}{\sqrt{2199637153}} \\ \omega_{co} = \pm \frac{500\sqrt{20\sqrt{727254571-248647}i}}{\sqrt{2199637153}} \end{cases}$$

La frecuencia de cruce es un número real y positivo, lo que elimina tres de las soluciones:

$$\omega_{co} = \frac{500\sqrt{20\sqrt{727254571+248647}}}{\sqrt{2199637153}} = 9.464 \text{ rad/min}$$

Sustituyendo en la segunda de las ecuaciones, se obtiene:

$$t_{du} = 0.164 \text{ min}$$

El retraso puede aumentar hasta un 64 % y el sistema continuará siendo estable.

10 Sistemas de control avanzado

Los sistemas de control más habituales en las industrias agroalimentarias son los basados en controladores de tipo PID. Estos controladores proporcionan un rendimiento suficientemente bueno en la mayor parte de las ocasiones, pero hay situaciones en las que generan una respuesta adecuada a las necesidades del proceso. En esos casos es necesario recurrir a los sistemas de control avanzado. En este capítulo vamos a ver una descripción cualitativa de algunos de estos sistemas de control avanzado.

10.1 Procesos con retrasos grandes

Es un hecho que los retrasos son una de las principales fuentes de inestabilidad de los lazos de control por retroalimentación. Las causas de la inestabilidad son variadas, pero se pueden destacar las siguientes:

1. Las perturbaciones que entran en el proceso no pueden ser detectadas hasta que ha pasado un periodo significativo de tiempo
2. Las acciones de control se basarán en medidas inadecuadas, ya que serán lecturas que ya no son actuales
3. La acción de control requerirá más tiempo hasta que su efecto se sienta en el proceso

Con objeto de reducir el impacto negativo de los retrasos grandes se puede utilizar el *compensador de Smith*.

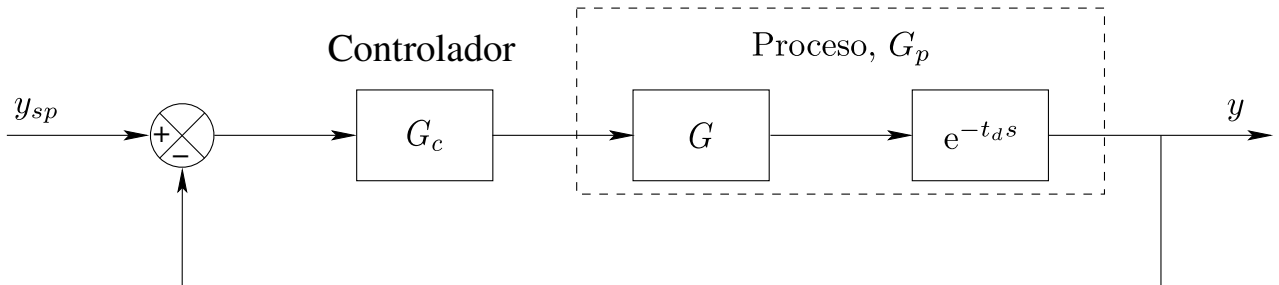


Figura 10.1: Lazo de control con un proceso con un retraso.

Veamos el sencillo lazo de control de la Figura 10.1. La función de transferencia del proceso es:

$$G_p(s) = G(s)e^{-t_d s}$$

La respuesta del proceso en función del error es:

$$y(s) = G_c(s)G(s)e^{-t_d s}\varepsilon(s)$$

La respuesta del proceso tiene un retraso de valor t_d . Los problemas de inestabilidad se podrían eliminar si se pudiera eliminar dicho retraso de la ecuación.

Para eliminar el efecto del retraso se puede utilizar el compensador de Smith, tal como se muestra en la Figura 10.2. El compensador trata de predecir el efecto del retraso sobre el sistema para eliminar el efecto negativo. En este caso, la entrada al comparador es $y^*(s)$:

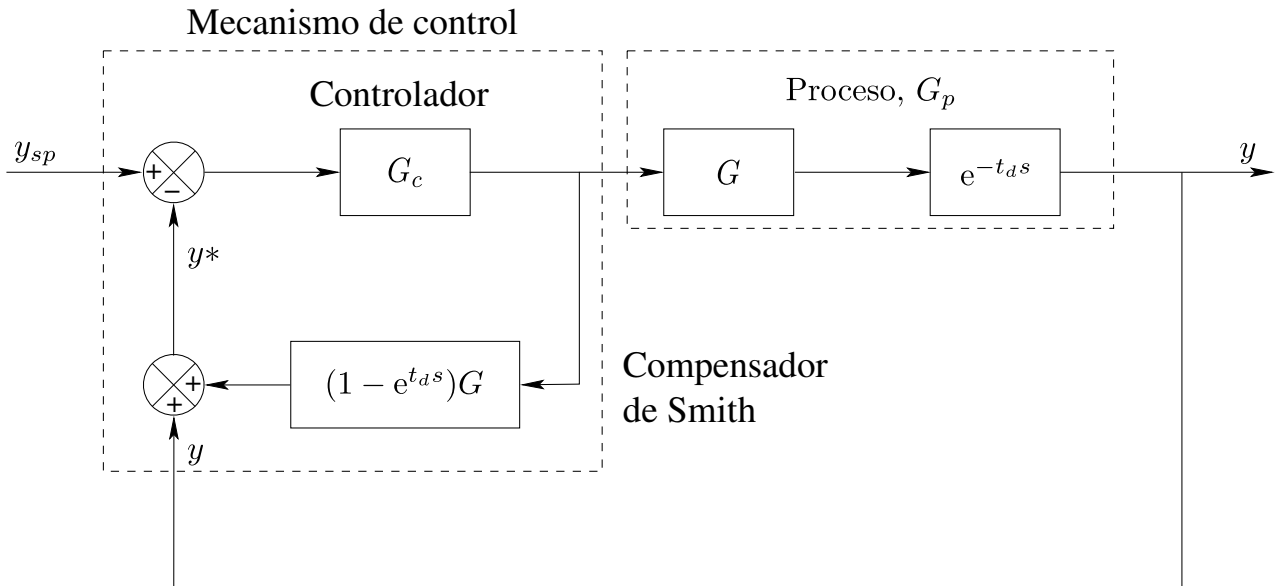


Figura 10.2: Lazo de control con un compensador de Smith.

$$y^*(s) = y(s) + (1 - e^{-t_d s}) G(s) c(s) = y(s) + (1 - e^{-t_d s}) G(s) G_c(s) \varepsilon(s)$$

Operando se obtiene:

$$y^*(s) = G_c(s) G(s) \varepsilon(s)$$

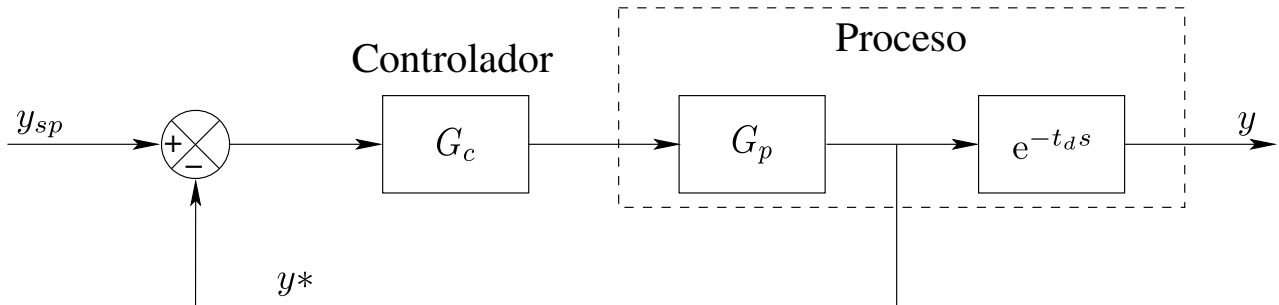


Figura 10.3: Resultado de la compensación del retraso.

En cierta manera se puede decir que el efecto del compensador de Smith es eliminar el retraso del lazo de control, tal como se muestra en la Figura 10.3. Es importante remarcar que la representación de dicha figura muestra el resultado matemático de la compensación del retraso, no es una representación de la realidad.

El funcionamiento del compensador de Smith será tan bueno como buena sea la estimación realizada del retraso y de la función de transferencia del proceso.

10.2 Control en cascada

El control en cascada se utiliza cuando se tiene una variable manipulable y más de una variable medida.

Consideremos el intercambiador de calor de la Figura 10.4. En este intercambiador se enfría una corriente mediante una camisa por la que circula un refrigerante. En el caso de que haya un aumento en

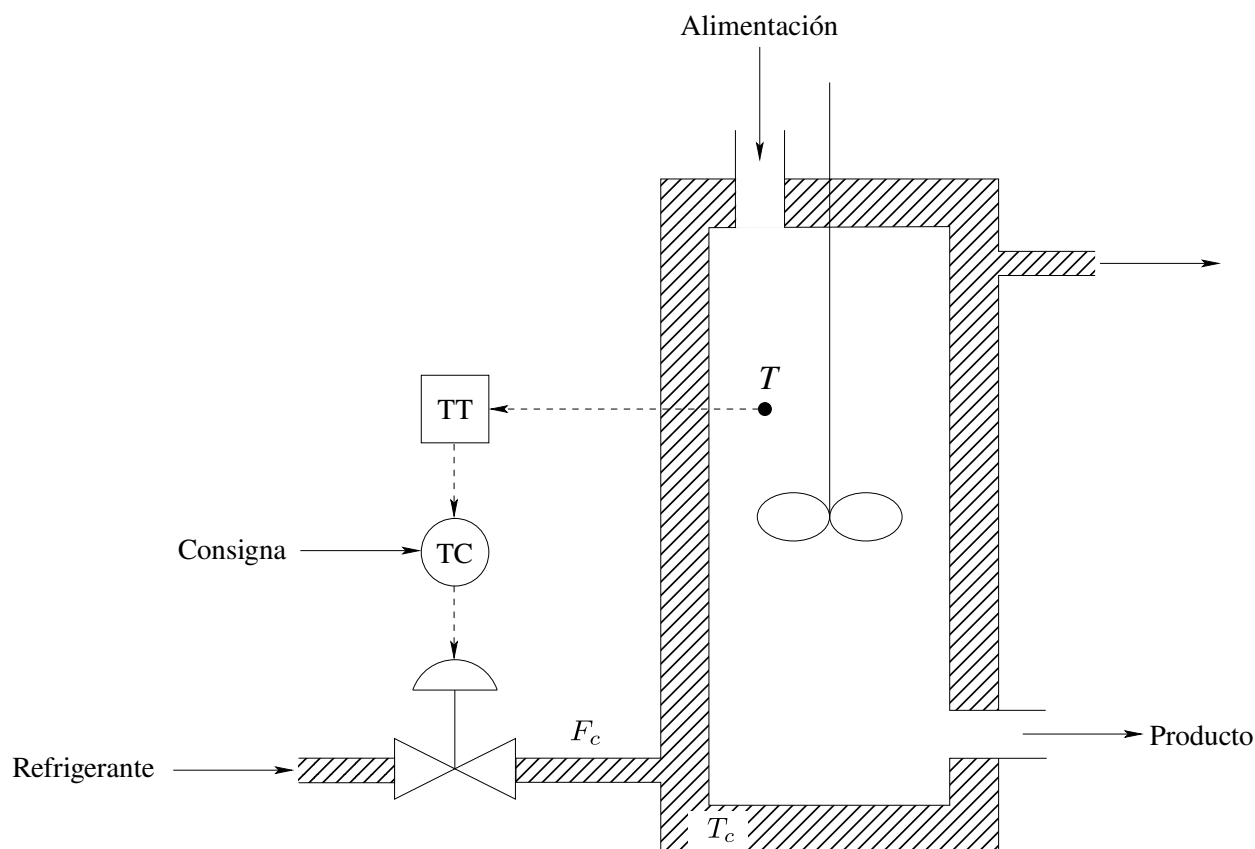


Figura 10.4: Intercambiador de calor regulado con un sistema de control por retroalimentación convencional.

la temperatura de la alimentación (T), el lazo de control medirá ese cambio y actuará en consecuencia aumentando el caudal del refrigerante (F_c) para que disminuya la temperatura T . La regulación es, en este caso, rápida y efectiva.

¿Qué ocurre si el cambio se produce en la temperatura del refrigerante (T_c)? En este caso el sistema de control es mucho menos efectivo. El sistema de control no registra la variación de la temperatura del refrigerante hasta que esta no modifica la temperatura de la alimentación. Este proceso es lento e inconveniente ya que provoca un cambio no deseado en la temperatura del producto que se está enfriando.

La solución consiste en utilizar un control en cascada, tal como se muestra en la Figura 10.5. En un sistema de control en cascada hay dos lazos de control que actúan sobre una misma variable manipulable. En este ejemplo, el lazo que mide la temperatura T es el lazo dominante, primario o maestro y utiliza una consigna suministrada por el operador. El segundo lazo de control es que el que mide la temperatura T_c y es el lazo secundario o esclavo. Este lazo utiliza como consigna la salida del lazo de control primario.

La ventaja del control en cascada es que si se produce un cambio en la T_c el lazo de control secundario actúa con gran rapidez, eliminando la perturbación antes de que afecte a T . Es muy habitual utilizar el control en cascada cuando se realiza control de caudal.

El sistema convencional de control por retroalimentación de este ejemplo se puede mostrar de manera generalizada en la Figura 10.6. Para el ejemplo en cuestión el Proceso II es la camisa del intercambiador de calor y el Proceso I es el interior del intercambiador.

Al utilizar un sistema de control en cascada el diagrama de bloques que se obtiene es diferente (Figura 10.7). El lazo de control secundario se utiliza para controlar el proceso II y el lazo de control

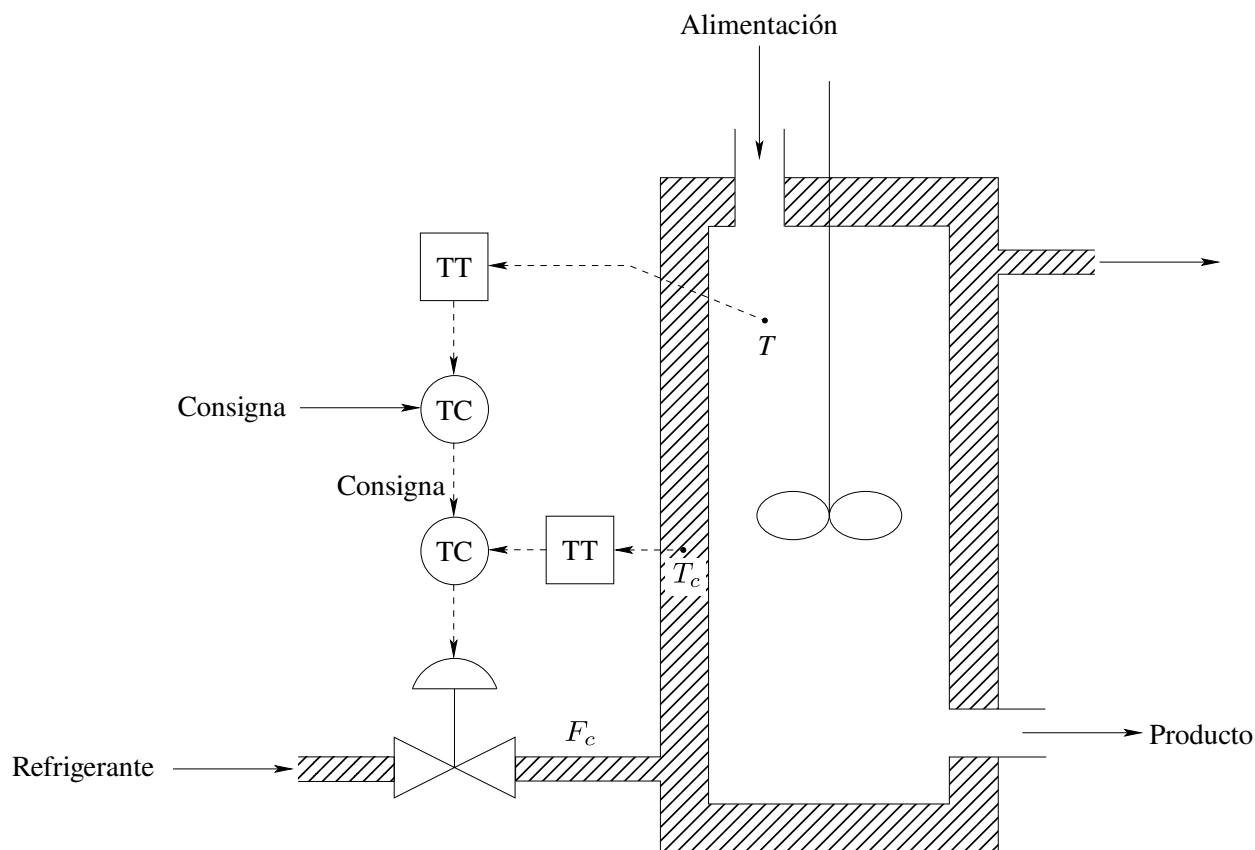


Figura 10.5: Uso del control en cascada para regular la temperatura del intercambiador de calor del ejemplo.

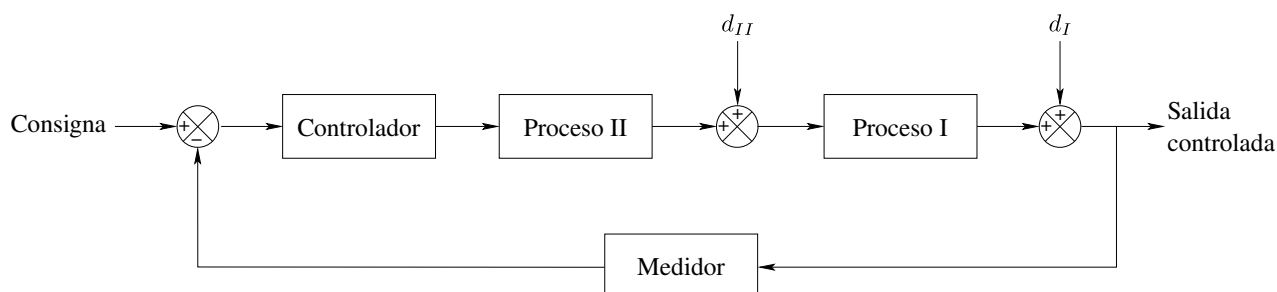


Figura 10.6: Representación esquemática del lazo de control por retroalimentación convencional.

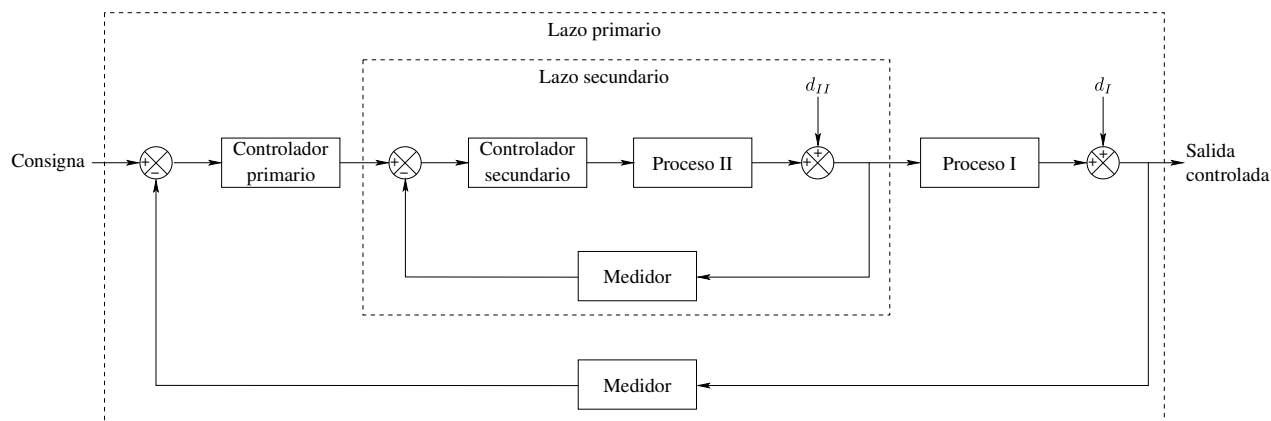


Figura 10.7: Diagrama de bloques de un sistema de control en cascada.

primario controla el proceso I. De esta manera las perturbaciones que afectan al proceso II pueden ser corregidas con rapidez, antes de que puedan alterar al proceso I.

Los controladores de los sistemas de control en cascada son reguladores PID estándar. Con frecuencia el controlador secundario es un controlador P o un PI con una acción integral pequeña. El motivo es que no hay problema si se produce un *offset* en el control secundario, ya que no es el objetivo del sistema de control.

Para que funcione correctamente un control en cascada, la dinámica del control secundario debe ser mucho más rápida que la del control primario para que no haya problemas de estabilidad. La sintonía de estos sistemas se realiza en dos pasos. En primer lugar, se realiza la sintonía del lazo secundario utilizando cualquiera de los lazos habituales y, a continuación, se sintoniza el lazo primario utilizando los diagramas de Bode.

Referencias

- Alfaro, Víctor M. 2024. *Sistemas de control proporcional, integral y derivativo: Algoritmos, análisis y ajuste*. <https://pidplanet.wordpress.com/sisconpid/>.
- Åström, K. J., y T. Hägglund. 2004. «Revisiting the Ziegler–Nichols Step Response Method for PID Control». *Journal of Process Control* 14 (6): 635-50. <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2004.01.002>.
- Bennett, S. 1979. *A History of Control Engineering 1800-1930*. Control Engineering 8. The Institution of Engineering and Technology.
- Bennett, S. 1993. *A History of Control Engineering, 1930-1955*. IEE Control Engineering Series 47. Stevenage, Herts., U.K: P. Peregrinus on behalf of the Institution of Electrical Engineers, London.
- Corriou, Jean-Pierre. 2018. *Process Control: Theory and Applications*. Cham: Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-61143-3>.
- Hägglund, T., y K. J. Åström. 2002. «Revisiting The Ziegler-Nichols Tuning Rules For Pi Control». *Asian Journal of Control* 4 (4): 364-80. <https://doi.org/10.1111/j.1934-6093.2002.tb00076.x>.
- Hägglund, T., y K. J. Åström. 2004. «Revisiting the Ziegler-Nichols Tuning Rules for Pi Control — Part Ii the Frequency Response Method». *Asian Journal of Control* 6 (4): 469-82. <https://doi.org/10.1111/j.1934-6093.2004.tb00368.x>.
- Iqbal, Kamran. 2022. *Introducción a los Sistemas de Control*. [https://espanol.libretexts.org/Ingenieria/Ingenier%C3%ADa_Industrial_y_de_Sistemas/Libro%3A_Introducci%C3%B3n_a_los_Sistemas_de_Control_\(Iqbal\)](https://espanol.libretexts.org/Ingenieria/Ingenier%C3%ADa_Industrial_y_de_Sistemas/Libro%3A_Introducci%C3%B3n_a_los_Sistemas_de_Control_(Iqbal)).
- Man, Yiu-Kwong. 2009. «An Improved Heaviside Approach to Partial Fraction Expansion and Its Applications». *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 40 (6): 808-14. <https://doi.org/10.1080/00207390902825310>.
- Mayr, Otto. 1970. *The Origins of Feedback Control*. The Massachussets Institute of technology.
- Morris, Alan S., y Reza Langari. 2012. *Measurement and Instrumentation: Theory and Application*. Waltham, MA: Academic Press.
- O'Dwyer, Aidan. 2009. *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*. 3rd ed. London: Imperial College Press.
- Seborg, Dale E., Thomas F. Edgar, Duncan A. Mellichamp, y Francis J. Doyle. 2017. *Process Dynamics and Control*. Fourth edition. Hoboken, N.J: Wiley.
- Wolfgang Altman, David MacDonald, y Steve MacKay. 2005. *Practical Process Control for Engineers and Technicians*. Oxford: Newnes. <https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-6400-4.X5000-9>.
- Woolf. 2022. *Dinámica y Controles de Procesos Químicos*. [https://espanol.libretexts.org/Ingenieria/Ingenier%C3%ADa_Industrial_y_de_Sistemas/Libro%3A_Din%C3%A1mica_y_Controles_de_Procesos_Qu%C3%ADmicos_\(Woolf\)](https://espanol.libretexts.org/Ingenieria/Ingenier%C3%ADa_Industrial_y_de_Sistemas/Libro%3A_Din%C3%A1mica_y_Controles_de_Procesos_Qu%C3%ADmicos_(Woolf)).
- Zywno, Malgorzata. s. f. *Introduction to Control Systems*. <https://pressbooks.library.torontomu.ca/controlsystems/>.